

## Applications diverses

### A. Quelques formules B.B.P

Ce paragraphe illustre assez bien les retombées inattendues de l'emploi d'un logiciel de calcul formel dans l'expérimentation d'une étude théorique.

Mon premier travail après avoir découvert le caractère isométrique de l'opérateur  $T$ , fut bien sûr d'explorer systématiquement à l'aide de M.A.P.L.E les transformées des fonctions usuelles. Le tableau suivant résume les premiers résultats.

|                                            |                                                                                                                              |
|--------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f(x)$                                     | $T(f(x)) = g(x) = \int_0^1 \frac{f(t) - f(x)}{t - x} dt$                                                                     |
| $f(x) = \ln(x)$                            | $g(x) = \frac{\ln^2(x)}{2} + \operatorname{dilog}(x) + \frac{\pi^2}{6}$                                                      |
| $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$     | $g(x) = \frac{\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2}{2} = \frac{1}{2\mu(x)}$                                               |
| $f(x) = \frac{1}{x+a}$                     | $g(x) = \frac{\ln(a) - \ln(1+a)}{x+a}$                                                                                       |
| $f(x) = \frac{1}{x^2+a}$                   | $g(x) = \frac{\ln(a) - \ln(1+a)}{2(x^2+a)} - \frac{x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{a}(x^2+a)}$ |
| $f(x) = x^n \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ | $g(x) = \frac{x^n}{2\mu(x)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{H_k}{k+1} x^{n-k-1}$                                                    |

Cette étude élémentaire me mit rapidement sur la piste de la « réductrice », à travers la fonction  $x \mapsto \varphi_0(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$  dont la transformée était au coefficient  $1/2$  près l'inverse de la mesure secondaire  $\mu$ .

C'est à partir de ce tableau également que je décelais la formule de composition vérifiée par  $T$  et par suite la deuxième isométrie  $S$ .

Sur ces premières transformées j'évaluais aussi les conséquences de l'isométrie  $T$ . En particulier, si  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0,1]$ , on sait que  $\int_0^1 f(x) 2 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) dx = \int_0^1 g(x) dx$ , avec  $g=T(f)$ .

Appliqué à la fonction  $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2+a}$  dont on connaît la transformée  $g$  ( $a \geq 0$ ) on en déduit facilement l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+a} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) dx = \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}{2\sqrt{a}} \ln\left(\frac{a}{1+a}\right)$$

Cependant le traitement de cette intégrale par M.A.P.L.E me révéla les bonnes surprises suivantes.

⊃ **Sur la constante de Catalan**

Pour  $a = 1$  l'intégrale se réduit à  $I = -\frac{\pi \ln(2)}{8}$ .

Or le changement de variable  $t = \frac{x}{1-x}$  que je suggérais pour le calcul me renvoya l'expression :

$$I = -\operatorname{Catalan} + \frac{i}{2} \operatorname{dilog}\left(\frac{1+i}{2}\right) - \frac{i}{2} \operatorname{dilog}\left(\frac{1-i}{2}\right)$$

Rappelons alors les définitions et propriétés élémentaires concernant la constante de Catalan et la fonction dilogarithme :

$$\text{Catalan} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = - \int_0^1 \frac{\ln(x) dx}{1+x^2}.$$

Pour  $x$  réel positif :  $\text{dilog}(x) = \int_1^x \frac{\ln(t) dt}{1-t}.$

Pour  $z$  complexe tel que  $|1-z| \leq 1$  :  $\text{dilog}(z) = \text{polylog}(2, 1-z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(1-z)^n}{n^2}.$

On en tire en particulier :  $\frac{i}{2} \text{dilog}\left(\frac{1+i}{2}\right) - \frac{i}{2} \text{dilog}\left(\frac{1-i}{2}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{(\sqrt{2})^n n^2}.$

Ceci nous donne après explicitation des valeurs de  $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$  une première égalité intéressante tirée des deux expressions de l'intégrale  $I$  :

$$\text{Catalan} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} \left( \frac{1}{(4k+3)^2} + \frac{2}{(4k+2)^2} + \frac{2}{(4k+1)^2} \right) + \frac{\pi \ln(2)}{8}$$

Évaluons maintenant notre même intégrale  $I$  d'une troisième façon, en utilisant le développement classique

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

En écrivant  $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x^2} dx$ , on en déduit immédiatement :

$$I = -\text{Catalan} - \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n} \ln(1-x) dx.$$

Par une I.P.P élémentaire on obtient ensuite :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{2n} \ln(1-x) dx &= \left[ \frac{x^{2n+1}-1}{2n+1} \times \ln(1-x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2n+1}-1}{(2n+1)(x-1)} dx \\ &= \frac{-1}{2n+1} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{-H_{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Ainsi  $I = \frac{-\pi \ln(2)}{8} = -\text{Catalan} + \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{H_{2n+1}}{2n+1}$ , ce que l'on peut écrire :

$$\text{Catalan} = \frac{\pi \ln(2)}{8} + \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{H_{2n+1}}{2n+1}.$$

Or  $\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{H_{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left( H_{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{H_{2n}}{2n+1} + \text{Catalan}.$

On en déduit la somme :  $\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{H_{2n}}{2n+1} = -\frac{\pi \ln(2)}{8}.$

→ **Généralisation de la méthode**

Pour  $a$  positif quelconque, la théorie donne l'expression exacte :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) dx = \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)}{2a} \ln\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)$$

Le calcul par M.A.P.L.E donne une expression peu engageante, somme d'une douzaine de termes où interviennent entre autres les dilogarithmes de :  $1 + \frac{i}{a}$  ;  $\frac{i}{a}$  ;  $1 + ia$  ;  $\frac{a^2 - ia}{a^2 + 1}.$

On a vu que l'on savait décomposer en série entière le dilogarithme d'un complexe du type  $z = 1 - u$ ,

lorsque le module de  $u$  est inférieur à 1.

$$|u| \leq 1 \Rightarrow \operatorname{dilog}(1-u) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{u^n}{n^2}.$$

Si on choisit  $a \geq 1$ , on pourra donc décomposer facilement  $\operatorname{dilog}\left(1 + \frac{i}{a}\right)$  et  $\operatorname{dilog}\left(1 - \frac{i}{a+i}\right)$ .

Pour les deux autres dilogarithmes, on peut remédier en utilisant les formules classiques de transformation, soit :

$$\operatorname{dilog}(x) + \operatorname{dilog}(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x) \quad \operatorname{dilog}(x) + \operatorname{dilog}(-x) = \frac{1}{2} \operatorname{dilog}(x^2).$$

$$\text{Pour } |x| > 1 : \operatorname{dilog}(1-x) + \operatorname{dilog}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} (\ln(-x))^2.$$

Après un bon après midi de bricolage j'obtiens enfin les formules synthétiques suivantes, toujours dans le cas où  $a$  est réel supérieur ou égal à 1.

$$\operatorname{dilog}\left(1 + \frac{i}{a}\right) + \operatorname{dilog}\left(1 - \frac{i}{a+i}\right) = \frac{-1}{8} \left( \ln\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right) - 2i \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \right)^2$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{a^n n^2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos(n \operatorname{Arctan}(a))}{(\sqrt{1+a^2})^n n^2} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \right)^2 - \frac{1}{8} \ln^2\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)$$

$$-\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{a^n n^2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin(n \operatorname{Arctan}(a))}{(\sqrt{1+a^2})^n n^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right) \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right)$$

Enfin, la troisième façon d'évaluer l'intégrale  $I$  par développement en série géométrique et I.P.P se généralise aussi facilement pour  $a \geq 1$  et conduit à la somme de série :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}}{(2n+1)a^{2n}} = \frac{a}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \ln\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)$$

Pour conclure ce paragraphe notons que le cas particulier  $a = \sqrt{3}$  s'explique :

$$\operatorname{dilog}\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{4}\right) + \operatorname{dilog}\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi^2}{72} - \frac{1}{8} \ln^2\left(\frac{3}{4}\right) + i \frac{\pi}{12} \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{2^{3k+2}(3k+1)^2} + \frac{1}{2^{3k+3}(3k+2)^2} - \frac{1}{3^{k+1}(2k+1)^2} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{36} \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{2^{3k}(3k)^2} + \frac{1}{2^{3k+2}(3k+1)^2} - \frac{1}{2^{3k+3}(3k+2)^2} + \frac{1}{3^k(2k)^2} \right) = \frac{\pi^2}{72} - \frac{1}{8} \ln^2\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{7}{32}$$

## B. Formules déduites de l'isométrie S

Nous supposons ici que la mesure  $\frac{\rho^2}{\mu}$  est bornée, ce qui équivaut vu l'égalité  $\frac{\rho}{\mu} = \frac{\varphi^2}{4} + \pi^2 \rho^2$ , à la convergence de l'intégrale  $\int_0^1 \rho^3(t) dt$ . (On rappelle que  $\varphi$  appartient à  $\mathcal{L}^2([0,1],\rho)$ ).

On sait alors que si  $f$  est une fonction telle que  $\varphi \times f$  et  $\tilde{T}(f)$  sont éléments de  $\mathcal{L}^2([0,1],\rho)$  et que  $\frac{\rho}{\mu} \times f$  est élément de  $\mathcal{L}^2([0,1],\mu)$ , on peut écrire la relation d'isométrie suivante :

$$\int_0^1 [\varphi(x)f(x) - \tilde{T}(f(x))]^2 dx = \int_0^1 f^2(x) \frac{\rho^2(x)}{\mu(x)} dx$$

Examinons quelques conséquences de cette identité dans des cas élémentaires.

⊃ Pour  $f = 1$ . Les conditions d'application sont réalisées de manière évidente, et la formule se simplifie en :  $\int_0^1 \varphi^2(x)\rho(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2\rho^2(x)\right)\rho(x) dx$ .

Après regroupement des termes on obtient :  $\int_0^1 \varphi^2(x)\rho(x) dx = \frac{4\pi^2}{3} \int_0^1 \rho^3(x) dx$

⊃ Pour  $f = \varphi$ . Ici les conditions d'application induisent la convergence des trois intégrales suivantes :  $\int_0^1 \varphi^4(x)\rho(x) dx ; \int_0^1 \rho^5(x) dx ; \int_0^1 \varphi^2(x)\rho^3(x) dx$ .

La formule d'isométrie va alors nous donner un lien simple entre ces trois quantités.

Puisque  $\tilde{T}(\varphi) = \frac{\rho}{\mu}$ , notre formule se traduit  $\int_0^1 [\varphi^2(x) - \frac{\rho(x)}{\mu(x)}]^2 \rho(x) dx = \int_0^1 \varphi^2(x) \frac{\rho^2(x)}{\mu(x)} dx$ .

On développe ces deux intégrales grâce à  $\frac{\rho}{\mu} = \frac{\varphi^2}{4} + \pi^2\rho^2$

– La première donne après regroupements :

$$I_1 = \frac{9}{16} \int_0^1 \varphi^4(x)\rho(x) dx + \pi^4 \int_0^1 \rho^5(x) dx - \frac{3\pi^2}{2} \int_0^1 \varphi^2(x)\rho^3(x) dx.$$

– La deuxième s'écrit :  $I_2 = \frac{1}{4} \int_0^1 \varphi^4(x)\rho(x) dx + \pi^2 \int_0^1 \varphi^2(x)\rho^3(x) dx$

La comparaison des deux nous donne la relation simplifiée suivante :

$$\int_0^1 \varphi^4(x)\rho(x) dx = 8\pi^2 \int_0^1 \varphi^2(x)\rho^3(x) dx - \frac{16\pi^4}{5} \int_0^1 \rho^5(x) dx$$

**Quelques applications de la formule**  $\int_0^1 \varphi^2(x)\rho(x) dx = \frac{4\pi^2}{3} \int_0^1 \rho^3(x) dx$

⊃ Pour  $\rho(x) = 2x$  on obtient :  $\int_0^1 x[x \ln(\frac{1-x}{x}) + 1]^2 dx = \frac{\pi^2}{12}$

⊃ Pour  $\rho(x) = -\ln(x)$  il vient :  $\int_0^1 [\frac{2\pi^2}{3} - \ln^2(x) - 2\text{dilog}(1-x)]^2 \ln(x) dx = -8\pi^2$

⊃ Pour  $\rho(x) = \frac{4}{\pi(x^2+1)}$  on a :  $\int_0^1 \frac{[4\ln(\frac{x}{1-x}) + \ln(4) + \pi x]^2}{(x^2+1)^3} dx = \frac{(8+3\pi)\pi^2}{6}$

⊃ Pour  $\rho(x) = \frac{(\ln(2))^{-1}}{x+1}$  les calculs donnent :  $\int_0^1 \frac{[\ln(2) + \ln(\frac{x}{1-x})]^2}{(x+1)^3} dx = \frac{\pi^2}{8}$

⊃ Pour  $\rho(x) = \frac{3(\sqrt{8}+1)}{14}\sqrt{x+1}$  :

$$\int_0^1 [2\sqrt{x+1} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - 4(\sqrt{2}-1) - 4\sqrt{x+1} \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\right)]^2 \sqrt{x+1} dx = \frac{8\pi^2(\sqrt{32}-1)}{15}$$

⊃ Pour  $\rho(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x}$  :  $\int_0^1 [\sqrt{x} \ln(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}) - 2]^2 \sqrt{x} dx = \frac{2\pi^2}{15}$

### Une autre formule reliant $\rho$ et $\varphi$

La relation isométrique  $\langle \tilde{S}(f) | \tilde{S}(g) \rangle_\rho = \langle f | g \rangle_{\frac{\rho^2}{\mu}}$  donne pour  $f = \varphi$  et  $g = 1$  après simplifications la relation suivante :

$$\int_0^1 \varphi^3(x)\rho(x) dx = 4\pi^2 \int_0^1 \rho^3(x)\varphi(x) dx$$

Autrement dit la fonction  $\frac{\varphi^2}{4} - \pi^2 \rho^2$  est orthogonale à  $\varphi$  dans  $\mathcal{L}^2([0,1],\rho)$ .

### C. Réductrice de la mesure secondaire

Rappelons que la transformée de Stieltjes de la mesure secondaire  $\mu$  relative à  $\rho$  est reliée à celle de  $\rho$  par :  $S_\mu(z) = z - c_1 - \frac{1}{S_\rho(z)}$ .

On retrouve  $\mu$  à partir de  $S_\mu$  grâce à Stieltjes - Perron :  $\mu(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{S_\mu(x - i\epsilon) - S_\mu(x + i\epsilon)}{2i\epsilon}$ .

Si elle existe, la réductrice de  $\mu$  est définie par :  $\psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} S_\mu(x - i\epsilon) + S_\mu(x + i\epsilon)$ .

Ceci nous donne :  $\psi(x) = 2(x - c_1) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{S_\rho(x - i\epsilon) + S_\rho(x + i\epsilon)}{S_\rho(x - i\epsilon) \times S_\rho(x + i\epsilon)}$ .

Soit :  $\psi(x) = 2(x - c_1) - \frac{\varphi(x)}{\frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2 \rho^2(x)}$ .

Ceci pouvant s'écrire plus simplement :  $\psi(x) = 2(x - c_1) - \frac{\varphi(x)\mu(x)}{\rho(x)}$ .

Une première application de la réductrice d'une mesure est la formule « de réduction » suivante : Pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{L}^2([0,1],\mu)$ ,  $\int_0^1 f(x)\psi(x)\mu(x)dx = \int_0^1 \tilde{T}_\mu(f(x))\mu(x)dx$ .

Avec ici  $\tilde{T}_\mu$  prolongeant l'opérateur  $f(x) \mapsto T_\mu(f(x)) = \int_0^1 \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \mu(t) dt$ .

Cela va donc se traduire ici :

$$2 \int_0^1 (x - c_1) f(x) \mu(x) dx - \int_0^1 f(x) \varphi(x) \frac{\mu^2(x)}{\rho(x)} dx = \int_0^1 \tilde{T}_\mu(f(x)) \mu(x) dx$$

Examinons quelques conséquences élémentaires de cette formule :

⊃ Pour  $f = 1$ . Il vient aussitôt :  $2 \int_0^1 (x - c_1) \mu(x) dx = \int_0^1 \frac{\varphi(x)\mu^2(x)}{\rho(x)} dx$ .

En introduisant les moments  $d_n$  de la mesure secondaire  $\mu$ , cela se traduit simplement :

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)\mu^2(x)}{\rho(x)} dx = 2(d_1 - c_1 d_0).$$

Rappelons nous alors les relations entre les moments de  $\rho$  et  $\mu$  :  $d_n = -\omega_{n+2}$  avec  $\sum_{n=0}^{n=\infty} \omega_n z^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n z^n}$ .

On en tire facilement les valeurs :

$$\omega_0 = 1 ; \omega_1 = -c_1 ; \omega_2 = (c_1)^2 - c_2 ; \omega_3 = -c_3 + 2c_1 c_2 - (c_1)^3$$

$$\text{Ainsi : } d_0 = -\omega_2 = c_2 - (c_1)^2 ; d_1 = -\omega_3 = c_3 - 2c_1 c_2 + (c_1)^3.$$

La formule de « réduction » obtenue s'écrit alors pour  $f = 1$  :

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)\mu^2(x)}{\rho(x)} dx = \int_0^1 \frac{\varphi(x)\rho(x)dx}{[\frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2 \rho^2(x)]^2} = 2[c_3 + 2(c_1)^3 - 3c_1 c_2]$$

⊃ Par exemple appliquée à  $\rho(x) = 2x$  cela nous donne la relation :

$$\int_0^1 \frac{x[x \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - 1] dx}{[(x \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - 1)^2 + \pi^2 x^2]^2} = -\frac{4}{135}$$

→ Pour  $\rho(x) = \frac{4}{\pi(x^2 + 1)}$  on obtient :

$$\int_0^1 \frac{(x^2 + 1)^2 [4 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \ln(4) + \pi x] dx}{\left(\frac{1}{\pi^2} [4 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \ln(4) + \pi x]^2 + 16\right)^2} = \frac{\pi(1 - \ln(2))}{2} + 4 \frac{(\ln(2))^3}{\pi} - 6 \ln(2) \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Pour  $\rho(x) = -\ln(x)$  il vient :

$$\int_0^1 \frac{\left[\frac{-2\pi^2}{3} + \ln^2(x) + 2 \operatorname{dilog}(1-x)\right] \ln(x) dx}{\left(\frac{1}{4} \left[\frac{-2\pi^2}{3} + \ln^2(x) + 2 \operatorname{dilog}(1-x)\right]^2 + \pi^2 \ln^2(x)\right)^2} = \frac{1}{48}$$

→ Pour  $f(x) = x$  on obtient l'égalité :  $\int_0^1 \frac{x\varphi(x)\rho(x) dx}{\left[\frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2 \rho^2(x)\right]^2} = 2(d_2 - c_1 d_1) - d_0^2$ .

On généralise bien sûr facilement pour une puissance entière quelconque.

$$\int_0^1 \frac{x^n \varphi(x) \rho(x) dx}{\left[\frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2 \rho^2(x)\right]^2} = 2(d_{n+1} - c_1 d_n) - \sum_{k=0}^{k=n-1} d_k d_{n+1-k}$$

### D. Transformée par T d'une série entière

On montre facilement dans le cas de la mesure de Lebesgue, que si  $f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n x^n$  est une série

entière avec un rayon de convergence  $R \geq 1$ , et telle que  $\sum_{n=0}^{n=\infty} |u_n| < +\infty$ , alors sa transformée par  $\tilde{T}$  est

définie par  $\tilde{T}(f(x)) = g(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} v_n x^n$  avec  $v_n = \sum_{k=n+1}^{k=\infty} \frac{u_k}{k-n}$ .

Écrivons alors la relation de conservation :  $\langle x - \frac{1}{2} \mid f(x) \rangle_1 = \langle 1 \mid g(x) \rangle_\mu$ .

Elle se traduit :  $\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n \int_0^1 x^{n+1} dx - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n \int_0^1 x^n dx = \sum_{n=0}^{n=\infty} v_n a_{n+2}$  (avec  $\frac{x}{\ln(1-x)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$ )

Après simplifications on obtient la formule :  $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n u_n}{(n+1)(n+2)} = 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} v_n a_{n+2}$ .

Pour  $u_n = \frac{1}{n^q}$  avec  $q$  entier  $\geq 1$  on détermine assez facilement de proche en proche les termes intervenant :

En posant :  $\zeta(q) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^q}$   $S_n^q = \zeta(q) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^q} = \sum_{k=n+1}^{k=\infty} \frac{1}{k^q}$

$\forall n \geq 1 : v_n = \sum_{k=n+1}^{k=\infty} \frac{1}{k^q(k-n)} = \frac{H_n}{n^q} - \sum_{k=2}^{k=q} \frac{S_n^q}{n^{q+1-k}}$  et  $v_0 = \zeta(q+1)$ .

$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{q-1}(n+1)(n+2)} = \sum_{k=2}^{k=q-1} (-1)^{q-1-k} \left(1 - \frac{1}{2^{q-k}}\right) \zeta(k) + (-1)^q \left(1 - \frac{3}{2^q}\right)$ .

On en déduit pour tout entier  $q \geq 1$  l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{H_n}{n^q} - \sum_{k=2}^{k=q} \frac{S_n^k}{n^{q+1-k}} \right) a_{n+2} = -\frac{\zeta(q+1)}{12} + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=2}^{k=q-1} (-1)^{q-1-k} \left(1 - \frac{1}{2^{q-k}}\right) \zeta(k) \right) + \frac{(-1)^q}{2} \left(1 - \frac{3}{2^q}\right)$$

En particulier pour les premières valeurs de l'entier  $q$  :

|                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{H_n}{n} a_{n+2} = \frac{1}{4} - \frac{\pi^2}{72}$                                                                                                                                                                                               | $\sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \frac{H_n}{n^2} - \frac{1}{n} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \right) \right] a_{n+2} = \frac{1}{8} - \frac{\zeta(3)}{12}$ |
| $\sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \frac{H_n}{n^3} - \frac{1}{n^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \right) - \frac{1}{n} \left( \zeta(3) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^3} \right) \right] a_{n+2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^4}{1080} - \frac{5}{16}$ |                                                                                                                                                                                  |

### E. Une série entière intéressante

Appliquons la formule de réduction :  $\int_0^1 u(x) \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{T}(u(x)) dx$  à la fonction  $u$  définie par  $x \mapsto u(x) = \frac{1}{x+a}$ . ( $a \geq 0$ )

On sait que sa transformée par  $\tilde{T}$  n'est autre que  $\tilde{T}u(x) = \gamma_a u(x)$  avec  $\gamma_a = \ln\left(\frac{a}{1+a}\right)$ .

On obtient donc l'égalité :  $\int_0^1 \frac{1}{x+a} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) dx = -\frac{1}{2} \ln^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)$  (E).

Prenons maintenant  $a > 1$ . On peut écrire pour tout  $x$  de  $[0,1]$  :  $\frac{1}{x+a} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{x^n}{a^n}$ .

On en déduit  $-\frac{1}{2} \ln^2\left(1 + \frac{1}{a}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \int_0^1 x^n \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) dx$ .

Or on a montré dans le chapitre 4, que  $\int_0^1 x^n \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) dx = \frac{H_n}{n+1}$ . On en déduit le développement suivant :

$$-\frac{1}{2} \ln^2\left(1 + \frac{1}{a}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \frac{H_n}{n+1}$$

Examinons les dérivées successives de la fonction  $a \mapsto v(a) = -\frac{1}{2} \ln^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)$ .

Par dérivation sous l'intégrale dans l'égalité (E), on obtient :  $v^{(n)}(a) = \int_0^1 \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) dx$ .

Rappelons alors la formule obtenue dans le chapitre 4 sur les transformées des dérivées :

$$\int_0^1 f^{(n)}(x) \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) dx = g^{(n-1)}(1) - g^{(n-1)}(0) + H_{n-1} [f^{(n-1)}(1) + f^{(n-1)}(0)] + \sum_{k=0}^{k=n-2} \alpha_n^k [f^{(k)}(0) + (-1)^{n+k+1} f^{(k)}(1)]$$

Appliquée à  $f(x) = u(x)$  on obtient après simplifications l'expression :

$$v^{(n)}(a) = (-1)^{n-1} (n-1)! \left[ \frac{1}{(1+a)^n} + \frac{1}{a^n} \right] \left( \ln\left(\frac{a}{1+a}\right) + H_{n-1} \right) + \sum_{k=0}^{k=n-2} \alpha_n^k (-1)^k \left[ \frac{1}{a^{k+1}} + \frac{(-1)^{n+k+1}}{(1+a)^{k+1}} \right]$$

Avec  $\alpha_n^k = (n-k-2)! [C_{n-1}^k + (-1)^{n-k}]$

## F. Transformée d'un produit par la réductrice

Rappelons que  $\tilde{T}(x^n \varphi(x)) = x^n \tilde{T}(\varphi(x)) + \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_{n-k-1} x^k$  avec  $\sigma_k = \int_0^1 t^k \varphi(t) \rho(t) dt$

Si  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ , la transformée par  $\tilde{T}$  du produit  $p(x) = f(x)\varphi(x)$  s'obtient alors facilement comme :

$$\tilde{T}(p(x)) = g(x) = \frac{\rho(x)}{\mu(x)} f(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n \text{ avec : } w_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sigma_{k-n-1}.$$

Si  $f$  est analytique, le théorème de Cauchy permet d'écrire  $u_n = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z) dz}{z^{n+1}}$ ,  $C$  désignant un cercle de centre 0 de rayon strictement plus grand que 1 parcouru dans le sens direct.

$$\text{On obtient alors } w_n = \frac{1}{2i\pi} \int_C \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sigma_{k-n-1}}{z^{k+1}} \right) f(z) dz.$$

Or on a vu dans le chapitre 3 que pour  $z$  de module assez grand :  $(S_\rho(z))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{z^{n+1}}$ .

On en déduit  $w_n = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{[S_\rho(z)]^2 f(z)}{z^{n+1}} dz$  si le rayon du cercle est assez grand.

Par sommation de la série géométrique  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{z^n} = \frac{z}{z-x}$  pour  $|x| \leq 1 < |z|$ , il vient alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{[S_\rho(z)]^2 f(z)}{z-x} dz.$$

$$\text{On obtient donc : } f(x)\varphi(x) \mapsto g(x) = \frac{\rho(x)}{\mu(x)} f(x) + \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{[S_\rho(z)]^2 f(z)}{z-x} dz.$$

Si  $f$  satisfait de plus aux hypothèses de la formule de composition on peut écrire :

$$f(x)\varphi(x) \mapsto \tilde{T}(p(x)) = \frac{\rho(x)}{\mu(x)} f(x) + \tilde{T}^2(f(x)).$$

Par comparaison des deux formules on en déduit l'expression analytique de  $\tilde{T}^2$ , soit :

$$\tilde{T}^2(f(x)) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{[S_\rho(z)]^2 f(z)}{z-x} dz$$

## G. Résultats annexes au premier chapitre

Voici sans les démonstrations relativement élémentaires quelques formules déduites de l'étude de la transformée de Laplace de  $x \mapsto \frac{1}{\Gamma(x)}$  effectuée dans le chapitre 1.

– Soit  $p$  un nombre complexe quelconque.

$$\text{Si } |\text{Im}(p)| > \pi, \text{ alors : } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-px} dx}{\Gamma(x)} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{(\ln(x) + p)^2 + \pi^2}.$$

$$\text{Si } -\pi < \text{Im}(p) < \pi, \text{ alors : } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-px} dx}{\Gamma(x)} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{(\ln(x) + p)^2 + \pi^2} + e^{-p} e^{e^{-p}}$$

– **Décomposition dans la base des polynômes de Laguerre.**

On rappelle la définition du polynôme de Laguerre d'ordre  $n$  :

$$L_n(X) = \frac{e^X}{n!} \frac{d^n}{dX^n} (X^n e^{-X}) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^k \frac{X^k}{k!}.$$

Ces polynômes constituent une base orthonormale de l'espace  $\mathcal{L}^2([0, +\infty[, e^{-x})$  muni du produit scalaire

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt.$$



La fonction  $f$  définie par  $x \mapsto f(x) = e^x - \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)} dt$  se décompose dans cette base suivant

$$e^x - \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)} dt = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{n+1} L_n(x)$$

(Les coefficients  $a_n$  étant ceux définis dans le chapitre 2 par :  $\frac{x}{\ln(1-x)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$  )

↪ **Écriture intégrale d'une série lentement convergente.**

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} = \frac{1}{2} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{\operatorname{sh}(\pi x)} \frac{dx}{4 \ln^2(x) + \pi^2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \frac{dx}{[x]!} = \int_0^1 \frac{e^{-x}(x+1) dx}{x(\ln^2(x) + \pi^2)} \quad ([x] \text{ désignant la partie entière de } x)$$

↪ **Quelques limites et expressions bizarres !**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{\Gamma(x) \sin(\pi x)} dx = -\frac{1}{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\Gamma(x) \sin(\pi x)} dx = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\Gamma(x) \sin(\pi x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (x-1)e^{-x} \ln |\ln(x)| dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\cos(\pi x) - \cos((2n+1)\pi x)) dx}{\Gamma(x) \sin(\pi x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (x-1)e^{-x} \ln(\ln^2(x) + \pi^2) dx$$

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{\cos(x)} \sin(\sin(x)) dx - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}$$

$$\gamma = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n)!} \left( \sum_{k=0}^{k=n} \frac{S_n^k}{k+1} \right) \text{ avec } S_n^k \text{ nombre de Stirling de première espèce défini par}$$

$$X(X-1)\dots(X-n-1) = \sum_{k=0}^{k=n} S_n^k X^k$$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \text{ avec } \begin{cases} u_1 = 0 ; u_2 = \frac{1}{4} ; u_3 = \frac{17}{36} \\ u_{n+2} = \frac{(3n^2 + 8n + 6)u_{n+1} - (3n^2 + 5n + 2)u_n + (n^2 + n)u_{n-1}}{(n+2)^2} \end{cases}$$

$$\gamma = \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy dx dy}{(xy-1) \ln(1-x)}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x + \cos(\theta)}{(x^2 + 2x \cos(\theta) + 1)(\ln^2(x) + \pi^2)} dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } -\pi < \theta < \pi : \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x \cos(\theta) + 1)(\ln^2(x) + \pi^2)} = \frac{1}{\sin(\theta)} \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + 2x \cos(\theta) + 1)}{x(\ln^2(x) + \pi^2)^2} dx = \frac{1}{2}$$

## H. Applications numériques diverses

Pour tester la théorie je me suis bien sûr amusé à vérifier les caractères isométriques obtenus sur les fonctions usuelles dont on connaît les transformées par  $\tilde{T}_1$ .

Voici un petit catalogue de résultats tous vérifiés numériquement à l'aide de M.A.P.L.E.

$$\neg \text{ Pour } \boxed{\rho(x) = 1; \mu(x) = \frac{1}{\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2}}$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx}{\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2} = \frac{1}{20}$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx}{(\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2)(x+1)} = \frac{7}{6} - \frac{\pi}{4 \ln(2)}$$

$$\int_0^1 \frac{(2 \ln(2) + \pi x)(1 - \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)) dx}{(\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2)(x^2 + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right) + \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{(1 - \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right))^2 dx}{\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2} = \frac{1}{72}$$

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2} \ln^2(x) + \operatorname{dilog}(x)}{\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2} dx = \frac{1}{4} - \frac{\pi^2}{72}$$

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2} \ln^2(x) + \operatorname{dilog}(x)}{(\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2)(x+1)} dx = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{\ln(2)} - 1\right) - 1$$

$$\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2} \ln^2(x) + \operatorname{dilog}(x) + \frac{\pi^2}{6}\right)^2}{\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2} dx = 1$$

$$\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2} \ln^2(x) + \operatorname{dilog}(x) + \frac{\pi^2}{6}\right)(1 - \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right))}{\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2} dx = \frac{1}{9}$$

$$\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2} \ln^2(x) + \operatorname{dilog}(x) + \frac{\pi^2}{6}\right)(2 \ln(2) + \pi x)}{(\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2)(x^2 + 1)} dx = 4 \operatorname{Catalan} - \pi$$

$$\int_0^1 \frac{(2 \ln(2) + \pi x)}{(\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2)(x^2 + 1)(x + 1)} dx = 1 + \pi\left(\frac{1}{2 \ln(2)} - 1\right)$$

$$\neg \text{ Pour } \boxed{\rho(x) = 2x; \mu(x) = \frac{x}{2 \left[ \left( x \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - 1 \right)^2 + \pi^2 x^2 \right]}}$$

$$\int_0^1 \frac{\left(2x \left[1 - \sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right] - \sqrt{x} + \frac{2}{3}\right)^2 x}{\left(x \ln \left(\frac{x}{1-x}\right) - 1\right)^2 + \pi^2 x^2} dx = \frac{1}{75}$$

$$\int_0^1 \frac{\left(2x \left[1 - \sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right] - \sqrt{x} + \frac{2}{3}\right) x}{\left(x \ln \left(\frac{x}{1-x}\right) - 1\right)^2 + \pi^2 x^2} dx = \frac{4}{105}$$

$$\int_0^1 \frac{\left(2x \left[1 - \sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right] - \sqrt{x} + \frac{2}{3}\right) x}{\left([x \ln \left(\frac{x}{1-x}\right) - 1]^2 + \pi^2 x^2\right)(x+1)} dx = \frac{24 \ln(2) + 15\pi - 64}{30(\ln(2) - 1)}$$

$$\int_0^1 \frac{\left(2x \left[1 - \sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right] - \sqrt{x} + \frac{2}{3}\right) (\pi - 4 - 2x \ln(2)) x}{\left([x \ln \left(\frac{x}{1-x}\right) - 1]^2 + \pi^2 x^2\right)(x^2 + 1)} dx = 8 - \frac{8 \ln(2)}{5} - \sqrt{2} \ln(3 + 2\sqrt{2}) -$$

$$\pi\sqrt{2} \int_0^1 \frac{\left(2x \left[1 - \sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right] - \sqrt{x} + \frac{2}{3}\right) \left(x \left[\frac{\ln^2(x)}{2} + \operatorname{dilog}(x) + \frac{\pi^2}{6}\right] - \ln(x) - 1\right) x}{\left(x \ln \left(\frac{x}{1-x}\right) - 1\right)^2 + \pi^2 x^2} dx = \frac{1}{25}$$

$$\int_0^1 \frac{\left(x \left[\frac{\ln^2(x)}{2} + \operatorname{dilog}(x) + \frac{\pi^2}{6}\right] - \ln(x) - 1\right)^2 x}{\left(x \ln \left(\frac{x}{1-x}\right) - 1\right)^2 + \pi^2 x^2} dx = \frac{1}{8}$$

$$\int_0^1 \frac{\left(x \left[\frac{\ln^2(x)}{2} + \operatorname{dilog}(x) + \frac{\pi^2}{6}\right] - \ln(x) - 1\right) x}{\left([x \ln \left(\frac{x}{1-x}\right) - 1]^2 + \pi^2 x^2\right)(x+1)} dx = \frac{\pi^2 - 6(\ln(2) + 1)}{12(\ln(2) - 1)}$$

$$\int_0^1 \frac{\left(x \left[\frac{\ln^2(x)}{2} + \operatorname{dilog}(x) + \frac{\pi^2}{6}\right] - \ln(x) - 1\right) (\pi - 4 - 2x \ln(2)) x}{\left([x \ln \left(\frac{x}{1-x}\right) - 1]^2 + \pi^2 x^2\right)(x^2 + 1)} dx = \ln(2) - \frac{\pi^2}{12}$$

$$\int_0^1 \frac{\left(x \left[\frac{\ln^2(x)}{2} + \operatorname{dilog}(x) + \frac{\pi^2}{6}\right] - \ln(x) - 1\right) x}{\left([x \ln \left(\frac{x}{1-x}\right) - 1]^2 + \pi^2 x^2\right)} dx = \frac{1}{9}$$

$$\int_0^1 \frac{(\pi - 4 - 2x \ln(2)) x}{\left([x \ln \left(\frac{x}{1-x}\right) - 1]^2 + \pi^2 x^2\right)(x^2 + 1)(x+1)} dx = \frac{8 \ln^2(2) + \pi - 10 \ln(2)}{2(\ln(2) - 1)}$$

$$\neg \text{ Pour } \boxed{\rho(x) = \frac{1}{(x+1) \ln(2)}; \mu(x) = \frac{(\ln(2))(x+1)}{\ln^2\left(\frac{2x}{1-x}\right) + \pi^2}}$$

$$\int_0^1 \frac{(\pi + \ln(4))x + \pi - \ln(4)}{(x^2 + 1)\left(\ln^2\left(\frac{2x}{1-x}\right) + \pi^2\right)} dx = 4 \ln(2) + 2 - \frac{\pi}{\ln(2)}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(\ln^2\left(\frac{2x}{1-x}\right) + \pi^2\right)} dx = \frac{1}{\ln^2(2)} - 2$$

$$\int_0^1 \frac{[(\pi + \ln(4))x + \pi - \ln(4)](x+1)}{(x^2+1)(\ln^2\left(\frac{2x}{1-x}\right) + \pi^2)} dx = \frac{\pi + \ln(4) - \pi \ln(4)}{\ln^2(2)}$$

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(\ln^2\left(\frac{2x}{1-x}\right) + \pi^2)} dx = \frac{3 \ln(2) - 2}{2 \ln^3(2)}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(\ln^2\left(\frac{2x}{1-x}\right) + \pi^2)} = \frac{3 \ln(2) - 2}{2 \ln(2)}$$

$$\int_0^1 \frac{(x+1)[(\pi + \ln(4))x + \pi - \ln(4)]^2}{(x^2+1)^2(\ln^2\left(\frac{2x}{1-x}\right) + \pi^2)} dx = \frac{4\pi \ln(2) - \pi^2 + 4 \ln^2(2)}{\ln(2)}$$

→ Pour  $\rho(x) = \frac{4}{\pi(x^2+1)} ; \mu(x) = \frac{\pi(x^2+1)}{4([\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\pi x}{4}]^2 + \pi^2)}$

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{([\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{\pi x}{4} + \frac{\ln(2)}{2}]^2 + \pi^2)(x+1)} dx = \frac{4(4\pi \ln(2) - \pi^2 + 4 \ln^2(2))}{\pi^2(\pi + \ln(4))}$$

$$\int_0^1 \frac{(\pi+2)x+2}{([\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{\pi x}{4} + \frac{\ln(2)}{2}]^2 + \pi^2)} dx = \frac{8[\pi(\ln(2) - 1) + \ln(4)]}{\pi^2}$$

$$\int_0^1 \frac{(\pi+2)x+2}{([\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{\pi x}{4} + \frac{\ln(2)}{2}]^2 + \pi^2)(x+1)} dx = \frac{4[\pi^2 - 2\pi - 4 \ln(2)]}{\pi(\pi + \ln(4))}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{([\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{\pi x}{4} + \frac{\ln(2)}{2}]^2 + \pi^2)(x+1)^2} dx = \frac{4[4\pi - \pi^2 - 4 \ln^2(2)]}{\pi(\pi + \ln(4))^2}$$

$$\int_0^1 \frac{[(\pi+2)x+2]^2}{(x^2+1)([\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{\pi x}{4} + \frac{\ln(2)}{2}]^2 + \pi^2)} dx = \frac{2(\pi^2 - 8)}{\pi}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{([\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{\pi x}{4} + \frac{\ln(2)}{2}]^2 + \pi^2)} dx = \frac{4(4\pi - \pi^2 - 4 \ln^2(2))}{\pi^3}$$

## I. Intervention des opérateurs adjoints

Nous supposons ici qu'il existe un sous espace  $M$  inclus dans l'intersection de  $\mathcal{L}^2([0,1],\rho)$  avec  $\mathcal{L}^2([0,1],\frac{\rho^2}{\mu})$ , vérifiant  $\tilde{T}(M) \subset \mathcal{L}^2([0,1],\rho)$ , et tel que pour tout  $f$  de  $M$ , le produit  $\varphi \times f$  appartienne encore à  $M$ .

( $\tilde{T}_\rho$  est définie ici sur  $\mathcal{L}^2([0,1],\rho)$  entier en utilisant la convention définie au début du chapitre 3)

Soit  $(f,g)$  un couple quelconque d'éléments de  $M$ . On peut d'abord écrire en utilisant la propriété essentielle de  $\tilde{T}_\rho$ , l'égalité :

$$\langle \tilde{S}_\rho(f) | g \rangle_\rho - \left( \int_0^1 \tilde{S}_\rho(f(x))\rho(x) dx \right) \times \left( \int_0^1 g(x)\rho(x) dx \right) = \langle \tilde{T}_\rho(\tilde{S}_\rho(f)) | \tilde{T}_\rho(g) \rangle_\mu$$

Or  $\tilde{S}_\rho(f)$  étant élément de  $H$ ,  $\int_0^1 \tilde{S}_\rho(f(x))\rho(x) dx = 0$ .

De plus, vu les hypothèses sur  $M$ ,  $f$  satisfait aux trois hypothèses de la formule de composition, ce qui nous donne  $\tilde{T}_\rho(\tilde{S}_\rho(f)) = \frac{\rho}{\mu} \times f$ . Des deux remarques précédentes on déduit donc :

$$\langle \tilde{S}_\rho(f) | g \rangle_\rho = \langle \tilde{T}_\rho(\tilde{S}_\rho(f)) | \tilde{T}_\rho(g) \rangle_\mu = \langle \frac{\rho}{\mu} \times f | \tilde{T}_\rho(g) \rangle_\mu = \langle f | \tilde{T}_\rho(g) \rangle_\rho.$$

Si on note  $\hat{T}$  et  $\hat{S}$  les restrictions respectives des opérateurs concernés à l'espace de départ égal à  $M$ , on a donc établi que pour tout couple  $(f, g)$  de vecteurs de  $M$  :

$$\boxed{\langle \hat{S}(f) | g \rangle_\rho = \langle f | \hat{T}(g) \rangle_\rho}$$

Les opérateurs  $\hat{T}$  et  $\hat{S}$  apparaissent donc comme adjoints l'un de l'autre pour la structure Euclidienne induite sur  $M$  par celle de  $\mathcal{L}^2([0,1], \rho)$ .

Dans le cas où  $\rho = 1$  mesure de Lebesgue, il est facile de donner des exemples d'espaces  $M$  satisfaisant aux conditions de stabilité énoncées ci-dessus. Par exemple on peut considérer le sous espace engendré par le système des puissances entières de la réductrice  $\varphi$  ou celui engendré par les fonctions  $x \mapsto x^n \ln^p \left( \frac{x}{1-x} \right)$ ,  $n$  et  $p$  décrivant également l'ensemble des entiers.

### Endomorphismes symétriques déduits des opérateurs précédents

Nous supposons de plus ici que  $M \subset H$ .

Sous nos hypothèses, les deux opérateurs  $U = I_M + \hat{T} \circ \hat{S}$  et  $V = I_M + \hat{S} \circ \hat{T}$  sont symétriques, de norme supérieure à 1 ( $I_M$  désignant l'application identique sur  $M$ ).

Étudions ces deux opérateurs.

▮ Pour  $U$  remarquons que pour tout  $f$  de  $M$  et d'après la formule fondamentale de composition :

$$U(f) = f + \hat{T}(\hat{S}(f)) = \left( 1 + \frac{\rho}{\mu} \right) f = F_{(\rho+\mu, \mu)}(f) \text{ avec } f \mapsto F_{(\rho+\mu, \mu)}(f) = \frac{\rho + \mu}{\mu} \times f.$$

Ceci nous montre que  $U$  est injective et que l'antécédent d'un élément donné  $g$  de  $\text{Im}(U)$  est égal à  $\frac{\mu}{\rho + \mu} \times g$ .

Pour ce qui concerne les normes la preuve est classique : si  $T^*$  est l'adjoint de  $T$ , on a pour tout  $f$  de l'ensemble de définition  $M$  :  $\langle T \circ T^*(f) | f \rangle_\rho = \langle T^*(f) | T^*(f) \rangle_\rho \geq 0$ .

Ainsi si  $U = I_M + T \circ T^*$ , on en déduit :  $\|U(f)\|_\rho \times \|f\|_\rho \geq |\langle f + T \circ T^*(f) / f \rangle_\rho| \geq \|f\|_\rho^2$

▮ Pour  $V$  étudions l'équation aux antécédents  $f + \hat{S}(\hat{T}(f)) = g$ , pour  $g$  donnée dans  $M$ .

Elle a pour conséquence par action de  $\hat{T}$  :  $\hat{T}(f) + \frac{\rho}{\mu} \hat{T}(f) = \hat{T}(g)$ .

Ceci nous montre que  $(g = 0) \Rightarrow (\hat{T}(f) = 0) \Rightarrow (f = 0)$ .  $V$  est donc également injective.

Pour  $g$  quelconque dans  $\text{Im}(V)$  cherchons à expliciter son antécédent.

Posons  $f = \tilde{T}^{-1} \left( \frac{\mu}{\rho + \mu} \times \hat{T}(g) \right)$ , sous réserve que  $\frac{\mu}{\rho + \mu} \times \hat{T}(g)$  est élément de  $\mathcal{L}^2([0,1], \mu)$ .

Vérifions directement que si cet  $f$  est élément de  $M$ , alors il vérifie bien  $V(f) = g$ .

$$V(f) = g \iff \tilde{T}^{-1} \left( \frac{\mu}{\rho + \mu} \times \hat{T}(g) \right) + \hat{S} \left( \frac{\mu}{\rho + \mu} \times \hat{T}(g) \right) = g.$$

Or on sait que  $\tilde{T}^{-1} = \tilde{S} \circ F_{(\mu, \rho)}$  et que  $\tilde{S}^{-1} = F_{(\mu, \rho)} \circ \tilde{T}$ . L'égalité ci-dessus équivaut donc à :

$$\tilde{S} \left( \frac{\mu^2}{\rho(\rho + \mu)} \hat{T}(g) \right) + \tilde{S} \left( \frac{\mu}{\rho + \mu} \hat{T}(g) \right) = \tilde{S} \left( \frac{\mu}{\rho} \hat{T}(g) \right).$$

Or celle-ci est évidente par linéarité et vu la relation  $\frac{\mu^2}{\rho(\rho + \mu)} + \frac{\mu}{\rho + \mu} = \frac{\mu}{\rho}$ .

Sous les hypothèses restrictives précédentes on peut donc écrire que  $f = \tilde{T}^{-1} \circ F_{(\mu, \rho+\mu)} \circ \tilde{T}(g)$  est bien antécédent de  $g$  pour  $V$ .

L'étude effectuée nous conduit au résultat plus condensé suivant :

Sous réserve de l'inclusion  $\mathcal{L}^2([0,1], \mu) \subset \mathcal{L}^2([0,1], \frac{\rho^2}{\mu}) \cap \mathcal{L}^2([0,1], \rho)$ , l'endomorphisme  $V$  défini sur  $H$  par

$$f \mapsto V(f) = f + \tilde{S}(\tilde{T}(f)) \text{ est égal à la composée : } \boxed{V = \tilde{T}^{-1} \circ F_{(\rho+\mu, \mu)} \circ \tilde{T}}$$

En effet sous l'hypothèse de cette inclusion, on vérifie facilement que  $F_{(\rho+\mu, \mu)} \circ \tilde{T}(H) \subset \mathcal{L}^2([0,1], \mu)$ .

Il suffit de remarquer que si  $g \in \mathcal{L}^2([0,1], \mu)$

$$\int_0^1 g^2(x) \left[ \frac{\rho(x) + \mu(x)}{\mu(x)} \right]^2 \mu(x) dx = \int_0^1 g^2(x) \frac{\rho^2(x)}{\mu(x)} dx + \int_0^1 g^2(x) \mu(x) dx + 2 \int_0^1 g^2(x) \rho(x) dx.$$

On vérifie alors facilement que si  $f$  appartient à  $H$  :  $f + \tilde{S}(\tilde{T}(f)) = \tilde{T}^{-1} \left( \frac{\rho + \mu}{\mu} \tilde{T}(f) \right)$ .

Il suffit de comparer les images par  $\tilde{T}$ . On obtient comme vu plus haut :  $\tilde{T}(f) + \frac{\rho}{\mu} f = \frac{\rho + \mu}{\mu} \tilde{T}(f)$ .

L'endomorphisme  $V$  est alors bijectif et ses puissances se calculent facilement :

Pour tout entier relatif  $n$  :  $V^n = \tilde{T}^{-1} \circ F_{((\rho+\mu)^n, \mu^n)} \circ \tilde{T}$ .

Pour tout  $f$  de  $H$  on a donc 
$$V^n(f) = (I_H + \tilde{S} \circ \tilde{T})^n(f) = \tilde{T}^{-1} \left( \left( 1 + \frac{\rho}{\mu} \right)^n \times \tilde{T}(f) \right).$$

Ce résultat reste valable ponctuellement indépendamment des conditions restrictives draconiennes énoncées ci-dessus pour une fonction  $f$  pour laquelle les compositions successives envisagées aient toujours un sens.

En particulier dans le cas de la mesure de Lebesgue, avec les notations d'opérateurs introduites au chapitre 4, on aura  $\frac{\tilde{S}}{\pi} = 2b - a$  et l'équation fondamentale se met sous la forme équivalente  $(2b - a)a = a^{-1}(b^2 + 1)a$ .

On en déduit que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$(\tilde{S} \circ \tilde{T})^n = \tilde{S}((\varphi_0^2 + \pi^2)^{n-1} \tilde{T}(f)) = 2\varphi_0(\varphi_0^2 + \pi^2)^{n-1} \tilde{T}(f) - \tilde{T}((\varphi_0^2 + \pi^2)^{n-1} \tilde{T}(f)).$$

La connaissance des transformées successives de  $f$  par  $\tilde{T}$  permettra donc d'explicitier à l'aide des formules du chapitre 4 l'expression ci-dessus ainsi que les intégrales du type  $\int_0^1 (\tilde{S} \circ \tilde{T})^n(f(x)) dx$ .

### Application de la transformée de Cayley

Sous les hypothèses précédentes, l'endomorphisme  $\hat{S} \circ \hat{T}$  étant symétrique, on peut lui appliquer la transformation de Cayley et lui faire correspondre l'opérateur unitaire  $U$  défini par :

$$U = (\hat{S} \circ \hat{T} + iI_M) \circ (\hat{S} \circ \hat{T} - iI_M)^{-1}.$$

En reprenant les calculs sur l'inversion de  $V$  on vérifie facilement que pour tout  $f$  de  $M$ .

$$(\hat{S} \circ \hat{T} - iI_M)^{-1} = \tilde{T}^{-1} \left( \frac{\mu}{\rho - i\mu} \times \hat{T}(f) \right).$$

L'endomorphisme  $U$  est donc défini par :  $f \mapsto U(f) = \hat{S} \left( \frac{\mu}{\rho - i\mu} \times \hat{T}(f) \right) + i\tilde{T}^{-1} \left( \frac{\mu}{\rho - i\mu} \times \hat{T}(f) \right)$ .

Or vu  $\tilde{T}^{-1} = \tilde{S} \circ F_{(\mu, \rho)}$ , (on est dans le cas où  $M$  est inclus dans  $H$ ), les calculs se simplifient en :

$$U(f) = \hat{S} \left( \frac{\mu}{\rho - i\mu} \times \hat{T}(f) \right) + i\hat{S} \left[ \frac{\mu}{\rho - i\mu} \left( \frac{\mu}{\rho - i\mu} \times \hat{T}(f) \right) \right] = \hat{S} \left[ \frac{\rho + i\mu}{\rho - i\mu} \times \frac{\mu}{\rho} \times \hat{T}(f) \right].$$

Si on introduit la mesure complexe  $v = \frac{\rho + i\mu}{\rho - i\mu} \times \frac{\mu}{\rho}$ , l'opérateur unitaire  $U$  associé à  $\hat{S} \circ \hat{T}$  par la transformée de Cayley est explicitée par :

$$U(f) = \hat{S}(v\hat{T}(f)) = \varphi \times v \times \tilde{T}(f) - \tilde{T}(v \times \tilde{T}(f))$$

### Décomposition canonique de T

L'écriture classique  $\hat{T} = \frac{\hat{T} + \hat{S}}{2} + \frac{\hat{T} - \hat{S}}{2}$  donne la décomposition de  $\hat{T}$  en somme d'un endomorphisme symétrique  $\hat{T}_s = \frac{\hat{T} + \hat{S}}{2}$  et d'un antisymétrique  $\hat{T}_a = \frac{\hat{T} - \hat{S}}{2}$ .

Ils s'explicitent en :  $f \mapsto \hat{T}_s(f) = \frac{\varphi}{2} \times f$  et  $f \mapsto \hat{T}_a(f) = \tilde{T}(f) - \frac{\varphi}{2} \times f$ .

## J. Compléments sur les puissances de l'opérateur T

On utilise ici les notations du chapitre 4.

### ⊖ Explicitation de $T^n(f)$

On montre facilement par récurrence sur l'entier  $n$  que si  $f$  est une fonction de classe  $C^n$  sur  $[0,1]$ , la transformée  $g_n = T^n(f)$  est explicitée par l'intégrale d'ordre  $n$  suivante :

$$g_n(x) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \left[ \sum_{k=1}^{k=n} \frac{f(t_k)}{(t_k - x) \prod_{i \neq k} (t_k - t_i)} + \frac{f(x)}{\prod_{i=1}^{i=n} (x - t_i)} \right] dt_1 dt_2 \dots dt_n.$$

Le passage d'un rang au suivant s'effectue naturellement à partir de la définition :

$$g_{n+1}(x) = \int_0^1 \frac{g_n(t_{n+1}) - g_n(x)}{t_{n+1} - x} dt_{n+1}.$$

La réduction des termes intervenant dans les deux images par  $g_n$  s'obtient grâce à :

$$\frac{f(t_k)}{t_k - t_{n+1}} - \frac{f(t_k)}{t_k - x} = \frac{(t_{n+1} - x)f(t_k)}{(t_k - t_{n+1})(t_k - x)}.$$

Le produit par  $\frac{1}{t_{n+1} - x}$  conduit alors sans problèmes à l'expression demandée.

### ⊖ Sur le calcul de $\int_0^1 T^n(\varphi_0(x)) dx$

Rappelons la formule obtenue dans le paragraphe 4 : Pour tout entier  $n \geq 1$

$$\int_0^1 T^{2n-1}(\varphi_0(x)) dx = \int_0^1 T^{2n-1}(\ln(\frac{x}{1-x})) dx = \lambda_{2n}^1 \pi^{2n} = -(-4)^n \beta_{2n} \pi^{2n}.$$

(Lorsque l'exposant est pair, l'intégrale correspondante est nulle).

Le paragraphe précédent nous permet donc d'expliciter le nombre de Bernouilli  $\beta_{2n}$  comme une intégrale

d'ordre  $2n$ , avec ici  $f(x) = \ln(\frac{x}{1-x}) = \ln(x) - \ln(1-x)$

On obtient :  $\lambda_{2n}^1 \pi^{2n} = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (\sum_{k=1}^{k=2n} \frac{f(t_k)}{\prod_{i \neq k} (t_k - t_i)}) dt_1 dt_2 \dots dt_{2n}.$

Par raison de symétrie on va pouvoir simplifier ce calcul. Il suffit d'utiliser le changement de variables élémentaire :  $t_1 \leftarrow 1 - t_1 ; t_2 \leftarrow 1 - t_2 ; \dots ; t_n \leftarrow 1 - t_n.$

Il vient donc  $(t_k - t_i) \leftarrow -(t_k - t_i)$  et comme il y a un nombre impair de facteurs dans chaque dénominateur, on obtient :

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (\sum_{k=1}^{k=2n} \frac{\ln(1-t_k)}{\prod_{i \neq k} (t_k - t_i)}) dt_1 dt_2 \dots dt_{2n} = - \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (\sum_{k=1}^{k=2n} \frac{\ln(t_k)}{\prod_{i \neq k} (t_k - t_i)}) dt_1 dt_2 \dots dt_{2n}.$$

On en déduit immédiatement la formule :

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (\sum_{k=1}^{k=2n} \frac{\ln(t_k)}{\prod_{i \neq k} (t_k - t_i)}) dt_1 dt_2 \dots dt_{2n} = \frac{\lambda_{2n}^1 \pi^{2n}}{2}$$

Vu les singularités intervenant, ces intégrales multiples, même pour des petites valeurs de  $n$  ne sont pas faciles à approcher. Pour  $n=4$  par exemple je n'ai pas réussi à « vérifier » la valeur exacte en utilisant MAPLE. Cela peut être un exercice d'analyse numérique intéressant.

Voilà en tout cas un bon moyen de tester des logiciels de calcul approché.

### ⊖ Évaluation des intégrales $\int_0^1 T^n(\varphi_0^k(x)) dx$

D'après la formule (F8) obtenue au paragraphe 4 du chapitre 4 on peut écrire :  $\int_0^1 T^n(\varphi_0(x)f(x)) dx =$

$$\sum_{j=1}^{j=n+2} \lambda_{n+1}^j \pi^{n+2-j} \int_0^1 T^{j-1}(f(x)) dx.$$

Pour  $f = (\varphi_0)^k$  on obtient :  $\int_0^1 T^n(\varphi_0^{k+1}(x)) dx = \sum_{j=1}^{j=n+2} \lambda_{n+1}^j \pi^{n+2-j} \int_0^1 T^{j-1}(\varphi_0^k(x)) dx.$

Si on pose  $g_n^k = \frac{\int_0^1 T^n(\varphi_0^k(x)) dx}{\pi^{n+k}}$ , l'égalité ci-dessus se simplifie en :  $g_n^{k+1} = \sum_{j=1}^{j=n+2} \lambda_{n+1}^j g_{j-1}^k.$

Rappelons aussi que  $g_n^1 = \frac{\int_0^1 T^n(\varphi_0(x)) dx}{\pi^{n+1}} = \lambda_{n+1}^1.$

On a donc un algorithme permettant d'évaluer facilement ces intégrales à partir des coefficients des polynômes  $B_n$ .

On obtient par exemple :  $g_n^2 = \sum_{j=1}^{j=n+2} \lambda_{n+1}^j g_{j-1}^1 = \sum_{j=1}^{j=n+2} \lambda_{n+1}^j \lambda_j^1.$

Or on sait que  $B_{n+1}(X) = \binom{n+1}{n+2} \left( (X^2+1)X^n + \sum_{k=0}^{k=n} \lambda_n^k B_k(X) \right).$

On en déduit facilement que pour  $n$  strictement plus grand que 1, le coefficient du terme de degré 1 de

$B_{n+1}(X)$  est donné par :  $\lambda_{n+1}^1 = \binom{n+1}{n+2} \left( \sum_{k=0}^{k=n} \lambda_n^k \lambda_k^1 \right).$

Ceci nous donne :  $\forall n \geq 1 \quad g_n^2 = \binom{n+3}{n+2} \lambda_{n+2}^1 + \lambda_{n+1}^{n+2} \lambda_{n+2}^1.$

Or on sait que  $\lambda_{n+1}^{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$ . Il reste donc :  $g_n^2 = 2\lambda_{n+2}^1.$

Le cas particulier  $n = 0$  donne  $g_0^2 = \frac{1}{3}.$

## K. Extensions des résultats au cas d'un intervalle non borné

Nous considérons ici une mesure positive bornée sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non borné. Si on reprend la démonstration du théorème fondamental du chapitre 2, étudiant le couplage entre les mesures de Stieltjes de  $\rho$  et de  $\mu$ , on s'aperçoit que tous les arguments invoqués restent encore valables. En effet, bien que la série

entière associée aux moments de  $\rho$ , soit  $\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n z^n$ , ait peut être un rayon de convergence nul, les développements asymptotiques utilisés mettant en jeu la transformée de Stieltjes sont encore parfaitement justifiés

car ils n'utilisent que l'existence de tous ces moments. La convergence effective à l'infini  $S_\rho(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}$

n'est pas utilisée dans la démarche. Seuls les développements d'ordre fixé  $n$  au voisinage de l'infini sont employés dans le processus de preuve.

Si en tant que séries formelles on a encore la relation  $\sum_{n=0}^{n=\infty} \omega_n Z^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n Z^n}$ , la mesure positive bornée  $\mu$

aura bien encore comme moment d'ordre  $n$  le réel  $d_n = -\omega_{n+2}$ .

Pour expliciter cette mesure, l'utilisation des formules d'inversion de Stieltjes-Perron s'avère encore performante. Seul le calcul simplifié de la réductrice  $\varphi$  tombe en défaut.

On devra donc se contenter de :  $\varphi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2 \int_I \frac{(x-t)\rho(t) dt}{(x-t)^2 + \epsilon^2}$  et  $\mu(x) = \frac{\rho(x)}{\frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2 \rho^2(x)}.$

Enfin, pour ce qui concerne les vérifications des égalités par comparaison des moments et l'extension des



opérateurs aux espaces entiers  $\mathcal{L}^2$  pour les différentes mesures, il est clair qu'elles ne seront encore validées que moyennant la densité de l'espace engendré par les polynômes. Ceci est bien réalisé dans les deux études suivantes.

▮ Examinons un premier exemple, la mesure de densité  $\rho(x) = e^{-x}$  sur  $I = ]0, +\infty[$ .

Une simple intégration par parties donne :

$$\varphi(x, \epsilon) = \int_0^{+\infty} \frac{2(x-t)\rho(t)dt}{(x-t)^2 + \epsilon^2} = [-e^{-t} \ln((x-t)^2 + \epsilon^2)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \ln[(x-t)^2 + \epsilon^2] e^{-t} dt$$

$$\text{Soit encore : } \varphi(x, \epsilon) = \int_0^{+\infty} \frac{2(x-t)\rho(t)dt}{(x-t)^2 + \epsilon^2} = \ln(x^2 + \epsilon^2) - \int_0^{+\infty} \ln[(x-t)^2 + \epsilon^2] e^{-t} dt.$$

On conclut facilement par le théorème de convergence monotone :

$$\varphi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \varphi(x, \epsilon) = 2[\ln(x) - \int_0^{+\infty} \ln|x-t| e^{-t} dt].$$

$$\text{On en déduit } \mu(x) = \frac{e^{-x}}{(\ln(x) - \int_0^{+\infty} \ln|x-t| e^{-t} dt)^2 + \pi^2 e^{-2x}}$$

On peut simplifier ces expressions par intervention de la fonction exponentielle intégral, analytique, définie

$$\text{pour } x > 0 \text{ par } Ei(1, x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx} dt}{t}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \ln|x-t| e^{-t} dt &= e^{-x} \int_0^{+\infty} \ln|x-t| e^{-(t-x)} dt \\ &= e^{-x} \left[ \int_0^x \ln(x-t) e^{-(t-x)} dt + \int_x^{+\infty} \ln(t-x) e^{-(t-x)} dt \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Or } \int_x^{+\infty} \ln(t-x) e^{-(t-x)} dt = \int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-u} du = -\gamma.$$

$$\text{Et : } \int_0^x \ln(x-t) e^{-(t-x)} dt = \int_0^x \ln(u) e^u du = e^x \ln(x) + Ei(1, -x) + \gamma + i\pi.$$

On obtient donc après simplifications, pour la réductrice :  $\varphi(x) = -2e^{-x}[Ei(1, -x) + i\pi]$ .

Pour la mesure secondaire :  $\mu(x) = \frac{e^x}{Ei(1, -x)[Ei(1, -x) + 2i\pi]}$ , les moments  $d_n$  relatifs à  $\mu$  sont définis

$$\text{par } d_n = -\omega_{n+2} \text{ et } \sum_{n=0}^{n=\infty} \omega_n Z^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=\infty} n! x^n}.$$

On obtient  $d_0 = 1, d_1 = 3, d_2 = 13, d_3 = 71, d_4 = 461, d_5 = 3447, d_6 = 29093, \dots$

$$\text{Ainsi par exemple : } \int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^x dx}{Ei(1, -x)[Ei(1, -x) + 2i\pi]} = 71.$$

$$\text{La formule } \int_I \varphi^2(x) \rho(x) dx = \frac{4\pi^2}{3} \int_I \rho^3(x) dx \text{ donne } \int_I e^{-3x} [Ei(1, -x) + i\pi]^2 dx = \frac{\pi^2}{9}.$$

▮ Cet exemple se généralise à une mesure  $\rho$  positive bornée sur  $I = ]0, +\infty[$  telle que :  $\rho$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , décroissante à l'infini, de limite réelle en 0 et vérifiant  $\rho(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t}\right)$ .

$$\text{On obtient en reprenant le schéma du calcul de } \varphi \text{ précédent : } \varphi(x) = 2 \left[ \rho(0^+) \ln(x) + \int_0^{+\infty} \ln|x-t| \rho'(t) dt \right].$$

▮ Prenons maintenant  $\rho(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}}$  sur  $] -\infty, +\infty[$ .

$$\text{On a bien } c_0 = 1 \text{ et pour tout } n \geq 1 : c_{2n+1} = 0 \quad c_{2n} = \prod_{k=0}^{k=n-1} (2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

$$\varphi(x, \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(x-t)\rho(t)dt}{(x-t)^2 + \epsilon^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -e^{-\frac{t^2}{2}} \ln((x-t)^2 + \epsilon^2) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln[(x-t)^2 + \epsilon^2] e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\epsilon^2]te^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$$\text{En passant à la limite, il vient : } \varphi(x) = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \ln|x-t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$$\text{Et la mesure secondaire s'écrit : } \mu(x) = \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}}{\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} t \ln|x-t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right]^2 + e^{-x^2}}.$$

J'ai testé sur MAPLE les moments de cette mesure.

Comme on le voit dans le programme suivant j'ai effectué une approche des plus élémentaires en définissant les fonctions par des procédures d'évaluation en flottant, puis j'ai fait tourner une grossière méthode des rectangles. Les résultats sont stupéfiants !

```
> f:=proc(x)
  local t,g;
  g:=int(t*ln(abs(x-t))*exp(-t*t/2),t=-infinity..infinity);g:=evalf(g);
end;
f:=proc(x) (1)
```

```
  local t,g;
  g := int(t*ln(abs(x-t))*exp(-1/2*t^2),t=-infinity..infinity);
  g := evalf(g)
```

```
end proc
```

```
> mmu:=proc(x)
  local g;
  g:=evalf(exp(-x*x/2)/(f(x)*f(x)+Pi*Pi*exp(-x*x)));end;
mmu := proc(x) local g; g := evalf(exp(-1/2*x^2)/(f(x)^2 + Pi^2*exp(-x^2))) end proc (2)
```

```
>
> sumo:=proc(p,n)
  local s,k;
  s:=0;for k from -p to p do s:=s+(10*k/p)^n*mmu(10*k/p);od;evalf(sqrt(2*
Pi))*10*s/p;end;
sumo := proc(p,n) (3)
```

```
  local s,k;
  s := 0;
  for k from -p to p do
    s := s + (10*k/p)^n*mmu(10*k/p)
  end do;
  10*evalf(sqrt(2*Pi))*s/p
```

```
end proc
```

```
>
> for i from 0 to 7 do print(d[2*i],sumo(100,2*i));od; (4)
d0, 0.9999999982
d2, 1.999999998
d4, 9.999999992
d6, 73.99999998
d8, 705.9999997
d10, 8161.999994
d12, 1.104100000 105
d14, 1.708394000 106
```

Les véritables valeurs obtenues par inversion de la série formelle  $\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n x^n = 1 + x^2 + 3x^4 + 15x^6 +$

$105x^8 + \dots$  sont :

$$d_0 = 1, d_2 = 2, d_4 = 10, d_6 = 74, d_8 = 706, d_{10} = 8162, d_{12} = 110410, d_{14} = 1708394.$$

Ces moments interviennent dans le dénombrement des diagrammes de Feynman.

De même si on teste la formule  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) \rho(x) dx = \frac{4\pi^2}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^3(x) dx.$

Le calcul théorique donne :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} t \ln|x-t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) dx = \frac{\pi\sqrt{6\pi}}{9}.$

Là encore le calcul approché est édifiant :

```

> f:=proc(x)
  local t,g;
  g:=int(t*ln(abs(x-t))*exp(-t*t/2),t=-infinity..infinity);g:=evalf(g);
end;
proc(x)
  local t,g;
  g:=int(t*ln(abs(x-t))*exp(-t*t/2),t=-infinity..infinity);
  g:=evalf(g)
end proc
(1)

>
>
> sumo:=proc(p)
  local s,k;
  s:=0;for k from -p to p do s:=s+evalf(exp(-(1/2)*(10*k/p)^2))*f(10*k/p)*
  f(10*k/p);od;10*s/p;end;
proc(p)
  local s,k;
  s:=0;
  for k from -p to p do
    s:=s+evalf(exp(-50*k^2/p^2))*f(10*k/p)*f(10*k/p)
  end do;
  10*s/p
end proc
(2)

>
>
> int(exp(-3*t*t/2),t=-infinity..infinity);
      1/3 sqrt(3) sqrt(2) sqrt(pi)
(3)

> evalf(sqrt(6)*Pi*Pi*sqrt(Pi)/9);
      4.761105418
(4)

> sumo(100);
      4.761105415
(5)

```

### L. À propos des nombres triangulaires harmoniques de Leibniz.

On rappelle leur génération :  $a_{(n,1)} = \frac{1}{n}$  ;  $a_{(n,k)} = a_{(n-1,k-1)} - a_{(n,k-1)}$  ;  $a_{(n,k)} = \frac{1}{nC_{n-1}^{k-1}}$ .

La somme des éléments d'une ligne d'ordre  $n$  est donnée par :  $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_{(n,k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k}.$

Elle est liée aux coefficients du binôme par la formule :  $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k+1} C_n^k s_k. \quad (R).$

|                         |               |                |                |                |               |
|-------------------------|---------------|----------------|----------------|----------------|---------------|
| $a_{(n,k)} \rightarrow$ | 1             | 2              | 3              | 4              | 5             |
| $\downarrow$            |               |                |                |                |               |
| 1                       | 1             |                |                |                |               |
| 2                       | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$  |                |                |               |
| 3                       | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$  | $\frac{1}{3}$  |                |               |
| 4                       | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$  |               |
| 5                       | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{5}$ |

Voici un tableau des premières valeurs :

$$s_1 = 1, s_2 = 1, s_3 = \frac{5}{6}, s_4 = \frac{2}{3}, s_5 = \frac{8}{15}, s_6 = \frac{13}{30}, s_7 = \frac{151}{420}, s_8 = \frac{32}{105}, s_9 = \frac{83}{315}, s_{10} = \frac{73}{315}.$$

On va voir que ces derniers coefficients interviennent dans la mesure secondaire  $\mu(x)$  relative à celle de densité  $\rho(x) = e^{-x}$  sur  $]0; +\infty[$ .

La base orthonormale canonique pour l'espace  $\mathcal{L}^2(]0; +\infty[, e^{-x})$  est celle des polynômes de Laguerre

$$\text{définis par } L_n(x) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^k \frac{x^k}{k!}.$$

Les polynômes secondaires  $Q_n = T(L_n)$  sont donc définis par :

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \frac{(-1)^k}{k!} T(x^k) = \sum_{k=1}^{k=n} C_n^k \frac{(1-)^k}{k!} \sum_{i=0}^{i=k-1} (k-1-i)! x^i.$$

Calculons les coefficients de Fourier de la réductrice  $\varphi$  relative à  $\rho$  dans cette base.

$$\text{Pour tout entier } n : \alpha_n = \langle \varphi | L_n \rangle_\rho = \langle T(\varphi) | T(L_n) \rangle_\mu = \langle \frac{\rho}{\mu} | Q_n \rangle_\mu = \langle Q_n | 1 \rangle_\rho.$$

$$\text{Puisque } \langle x^i | 1 \rangle_\rho = c_i = i!, \text{ il vient donc : } \alpha_n = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k C_n^k \sum_{i=0}^{i=k-1} \frac{(k-1-i)! i!}{k!}.$$

$$\text{Or } \sum_{i=0}^{i=k-1} \frac{(k-1-i)! i!}{k!} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{i=k-1} \frac{1}{C_{k-1}^i} = s_k.$$

$$\text{On en déduit : } \alpha_n = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k C_n^k s_k = -s_n \text{ d'après (R).}$$

$$\text{On a donc } \varphi(x) = - \sum_{n=1}^{n=+\infty} s_n L_n(x) \text{ dans l'espace } \mathcal{L}^2(]0; +\infty[, e^{-x}).$$

$$\text{Ceci nous donne en évaluant le carré de la norme : } \int_0^{+\infty} \varphi^2(x) e^{-x} dx = \sum_{n=1}^{n=+\infty} s_n^2.$$

Cette intégrale a été évaluée précédemment grâce à la formule maintenant classique pour le lecteur :

$$\int_I \varphi^2(x) \rho(x) dx = \frac{4\pi^2}{3} \int_I \rho^3(x) dx. \text{ On en déduit la somme des carrés des termes } s_n, \text{ plus précisément :}$$

$$\|\varphi\|_\rho^2 = \sum_{n=1}^{n=+\infty} s_n^2 = \frac{4\pi^2}{9}.$$

$$\int_0^{+\infty} 4[Ei(1, -x) + i\pi]^2 e^{-3x} dx = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k} \right)^2 = \frac{4\pi^2}{9}.$$

Remarquons que ces sommes des nombres harmoniques de Leibniz interviennent également dans les moments de cette même réductrice  $\varphi$  pour la mesure  $\rho$ .

On sait en effet que  $\sigma_n = \int_0^{+\infty} \varphi(x)x^n \rho(x) dx = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_k c_{n-1-k}$ .

Puisque ici  $c_n = n!$ , le calcul se résume à  $\sigma_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} k!(n-1-k)! = \frac{n!}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k} = n!s_n$ .

Voici d'autres applications intéressantes de la décomposition de la réductrice.

Rappelons que pour une fonction  $f$  de  $\mathcal{L}^2(]0; +\infty[, e^{-x})$ , on a la formule de réduction :

$$\langle \varphi | f \rangle_\rho = \langle \frac{\rho}{\mu} | T(f) \rangle_\mu = \langle 1 | T(f) \rangle_\rho.$$

Si on connaît les coefficients de Fourier de  $f$  dans la base des polynômes de Laguerre, les deux décompositions :

$$\begin{cases} \varphi(x) = - \sum_{n=1}^{n=+\infty} s_n L_n(x) \\ f(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n L_n(x) \end{cases} \text{ permettent de traduire le produit scalaire précédent en :}$$

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} e^{-x-y} dx dy = - \sum_{n=1}^{n=+\infty} u_n s_n.$$

Par exemple pour la décomposition classique :  $f(x) = e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{\alpha^n}{(\alpha + 1)^{n+1}} L_n(x)$ ,  $\alpha > 0$ ,

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha y} - e^{-\alpha x}}{y - x} e^{-x-y} dx dy = - \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{s_n}{\alpha + 1} \left( \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^n.$$

En posant  $z = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$ , on obtient après simplifications l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} e^{\frac{y}{z-1}} - e^{-y} e^{\frac{x}{z-1}}}{y - x} dx dy = (z - 1) \sum_{n=1}^{n=+\infty} s_n z^n.$$

Enfin le changement de variable  $\begin{cases} x = -\ln(t) \\ y = -\ln(s) \end{cases}$  nous conduit à :

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{s^{\frac{z}{1-z}} - t^{\frac{z}{1-z}}}{\ln(s) - \ln(t)} dt ds = (z - 1) \sum_{n=1}^{n=+\infty} s_n z^n. \text{ En particulier pour } z = \frac{1}{2} \text{ on arrive à :}$$

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{s - t}{\ln(t) - \ln(s)} dt ds = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{2^n} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k} \right)$$

La décomposition  $\ln(x) = -\gamma L_0(x) - \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n} L_n(x)$  conduit par le même processus à la formule :

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(y) - \ln(x)}{y - x} e^{-x-y} dx dy = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{s_n}{n}.$$

**Sur le calcul de la somme infinie**  $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n!)^2}{(2n + 1)!} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ .

C'est encore une belle application de la formule  $\int_I \varphi^2(x)\rho(x) dx = \frac{4\pi^2}{3} \int_I \rho^3(x) dx$  (F)

Nous considérons ici la mesure de Gauss étudiée précédemment :  $\rho(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}}$ .

On a déjà explicité la réductrice  $\varphi(x) = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \ln|x - t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

Les polynômes orthogonaux sont ceux classiques d'Hermitte et peuvent être explicités facilement, par exemple à partir de ceux de Laguerre.

On en déduit comme on l'a déjà fait plusieurs fois précédemment la forme des polynômes secondaires  $Q_n$  et par suite les coefficients de Fourier de la réductrice  $\alpha_n = \langle H_n | \varphi \rangle_\rho = \langle Q_n | \rho \rangle$ .

Les calculs conduisent après simplifications à :

$$\begin{cases} \alpha_{2n} = 0 \\ \alpha_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n!}{\sqrt{(2n+1)!}} \end{cases}$$

La formule (F) nous donne alors :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{4\pi^2}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{3x^2}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^3} dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Le carré de la norme de la réductrice se traduit également :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} t \ln|x-t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\pi^2 \sqrt{6\pi}}{9}.$$

Un calcul approché avec MAPLE par une banale méthode des rectangles confirme nettement ce résultat théorique.

Le fichier MAPLE suivant résume ces opérations.