Étude de l'isométrie T associée à la mesure de Lebesgue

Dans le cas particulier où $\rho = 1$, les moments d'ordre n de ρ sont égaux à $c_n = \dfrac{1}{n+1}$, et ceux de la mesure associée μ sont donnés par $d_n = -\omega_{n+2} = a_{n+2}$ avec $\dfrac{x}{\ln(1-x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$.

Le nombre harmonique d'ordre n relatif à ρ est ici simplement le nombre harmonique usuel $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

Nous allons montrer que ρ est réductible et proposer des applications intéressantes des isométries $\widetilde{T}$ et $\widetilde{S}$ dans ce cas particulier.

A. Etude de la réductrice

1. Réductibilité de la mesure de Lebesgue

Pour $\rho(x) = 1$ nous savons que $\mu(x) = \dfrac{1}{\ln^2\left(\dfrac{x}{1-x}\right) + \pi^2}$.

Vérifions que le quotient de ρ par μ est bien élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$.

$\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\rho(x)}{\mu(x)}\right)^2 \mu(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x + \pi^2$ est bien convergente.

Pour l'établir de manière élémentaire il suffit par exemple de commencer par montrer en intégrant par parties que :

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_0^1 = -1$, puis que $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x = -2I_1 = 2$

De manière plus générale toutes les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln^n(x)\,\mathrm{d}x$ convergent pour tout entier n et sont définies de proche en proche par $I_{n+1} = -(n+1)I_n$. On en déduit ensuite facilement par développement puis en changeant x en $1-x$, la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$.

2. Calcul de la réductrice

J'ai décelé cette fonction en étudiant systématiquement les transformées par T des fonctions usuelles avec le logiciel de calcul formel M.A.P.L.E. Etonné de trouver une fonction φ_0 dont l'image était l'inverse de la mesure μ, j'ai étudié ensuite les transformées des produits de φ_0 par les puissances. C'est cette recherche qui m'a mis sur la voie de la deuxième isométrie S puis m'a conduit vers la généralisation développée dans le chapitre précédent.

L'emploi du logiciel n'étant pas une preuve décisive (φ n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ mais sur $]0,1[$ seulement), voici comment je vérifiais initialement l'égalité $T(\varphi) = \dfrac{\rho}{\mu}$.

Théorème 1 *La fonction φ de $\mathscr{L}^2([0,1])$ définie sur $]0,1[$ par $x \longmapsto \varphi(x) = 2\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ est la réductrice de la mesure de Lebesgue.*

Pour établir que $\widetilde{T}(\varphi) = \dfrac{\rho}{\mu}$ il suffit de vérifier que pour tout entier n : $< \widetilde{T}(\varphi) \mid T(x^n) >_\mu = < \dfrac{\rho}{\mu} \mid T(x^n) >_\mu$.

Cela revient à montrer que $< \varphi \mid x^n >_\rho = < T(x^n) \mid 1 >_\rho$.

Le deuxième produit scalaire s'évalue facilement puisque $T(x^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{x^k}{n-k}$ et $\rho = 1$;

On obtient $< T(x^n) \mid 1 >= \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{(k+1)(n-k)} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k}\right) = 2\frac{H_n}{n+1}$.

Pour évaluer le premier produit écrivons $< \varphi \mid x^n >= 2\left(\int_0^1 x^n \ln(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n \ln(1-x)\mathrm{d}x\right)$.

En intégrant par parties il vient : $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}$.

De même

$$\int_0^1 x^n \ln(1-x)\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{x^{n+1}-1}{n+1}\right)\ln(1-x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}-1}{x-1}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{n+1}\left(H_n + \frac{1}{n+1}\right).$$

Ainsi on obtient bien également : $< \varphi \mid x^n >= 2\dfrac{H_n}{n+1}$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour exemple d'application du théorème général d'explicitation de la réductrice, retrouvons cette fonction en analysant $\psi(x) = \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} 2\displaystyle\int_0^1 \frac{(x-t)\rho(t)\mathrm{d}t}{(x-t)^2+\epsilon^2}$.

Puisque ici $\rho(t) = 1$ on obtient directement $\psi(x) = \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} [-\ln((x-t)^2+\epsilon^2)]_0^1 = 2\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

3. Traduction des propriétés de S

Commençons par expliciter la forme linéaire Φ. On sait que pour tout élément f de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$, on a l'égalité : $\int_0^1 \widetilde{T}(f(x))\rho(x)\mathrm{d}x = \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)f(x)\rho(x)\mathrm{d}x$.

En particulier, si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, sa transformée $g = T(f)$ est donnée par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\mathrm{d}t$,d'où $\int_0^1 \widetilde{T}(f(x))\rho(x)\mathrm{d}x = \displaystyle\iint_C \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$ avec $C = [0,1]\times[0,1]$.

On obtient alors la formule : $\boxed{\displaystyle\iint_C \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 f(x)\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x.}$

On peut en fait la vérifier directement en passant en coordonnées polaires, puis par changements de variables et intégrations par parties bien choisis.

Traduisons maintenant le caractère isométrique de S :

Pour tout f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, posons $g = \widetilde{T}(f)$ et $h = S(f) = \varphi \times f - g$.

Les trois conditions du théorème de composition entre T et S sont ici assurées. En effet :

¬ $\varphi \times f$ est élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ car f est bornée sur $[0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 \varphi^2(x)\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$ est convergente.

¬ $g = \widetilde{T}(f)$ est élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ car f étant supposée de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, le théorème de dérivation sous l'intégrale assure que g sera continue sur $[0,1]$ donc de carré intégrable sur cet intervalle.

¬ Enfin $\dfrac{\rho}{\mu} \times f$ est élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$ car f est bornée sur cet intervalle et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mu(x)}$ a déjà été examinée comme convergente.

On aura donc bien la relation $\|S(f)\|_\rho = \|f\|_{\frac{\rho^2}{\mu}}$, qui se traduit ici par :

$$\boxed{\int_0^1 \left(f(x)\times 2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - g(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\left[\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)+\pi^2\right]\mathrm{d}x.}$$

En particulier pour f constante égale à 1 on en déduit $\displaystyle\int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}$.

On généralisera dans ce qui suit le calcul des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \ln^n\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$ pour n entier quelconque, grâce à l'intervention répétée de T. Pour le moment démontrons une formule annexe déduite des isométries

T et S, toujours dans le cas de f de classe $\mathscr{C}^2$.

$$\boxed{\int_0^1 h^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 T^2(f^2(x))\mathrm{d}x + \frac{4\pi^2}{3}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.}$$

En effet : $\|h\|^2 = < f^2 \mid \frac{\varphi^2}{4} + \pi^2 > = < f^2 \mid \pi^2 > + \frac{1}{4} < T(f^2) \mid T(\varphi^2) >_\mu + \frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \times \int_0^1 \varphi^2(x)\mathrm{d}x.$

Soit en simplifiant : $\|h\|^2 = \frac{1}{4} < T(f^2) \mid T(\varphi^2) >_\mu + \frac{4\pi^2}{3}\|f\|^2.$

Calculons $T(\varphi^2)$ à partir de $T(\varphi \times f - T(f)) = \frac{\rho}{\mu} \times f$. En prenant $f = \varphi$ on obtient :

$T(\varphi^2) - T\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{\varphi}{\mu}$, soit $T(\varphi^2) - \frac{1}{4}T(\varphi^2) = \frac{\varphi}{\mu}$ et par suite $T(\varphi^2) = \frac{4\varphi}{3\mu}$.

On peut donc transformer

$< T(f^2) \mid T(\varphi^2) >_\mu$ en : $\frac{4}{3} < T(f^2) \mid \varphi > = \frac{4}{3} < T^2(f^2) \mid T(\varphi) >_\mu = \frac{4}{3} < T^2(f^2) \mid 1 >$.

On obtient finalement : $\|h\|^2 = \frac{1}{3} < T^2(f^2) \mid 1 > + \frac{4\pi^2}{3}\|f\|^2$, ce qu'il fallait démontrer.

B. Itérations déduites de la composée $T \circ S$

1. Une démarche algébrique

Pour des raisons de commodité nous poserons $\varphi_0 = \frac{\varphi}{2}$, et nous nous proposons d'étudier la transformation $f \longmapsto T(\varphi_0^n f)$. Celle ci n'est plus définie sur $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ mais sur une classe plus restreinte de fonctions contenant les polynômes et les puissances de φ_0.

Dans toute la suite nous supposerons que f est choisie telle que les transformations proposées sont effectivement toujours possibles, c'est à dire que les conditions d'application de la formule de composition se retrouvent à chaque étage du calcul.

Pour des commodités d'écriture on notera ici T en place de $\widetilde{T}$.

Partons de l'identité fondamentale $T(\varphi f) = T^2(f) + (\frac{\varphi^2}{4} + \pi^2) \times f$ qui se traduit

$2T(\varphi_0 \times f) = T^2(f) + (\varphi_0^2 + \pi^2) \times f$.

En posant $\varphi_0 = \pi\varphi_1$ on obtient $\frac{1}{\pi}T(\varphi_1 f) = \frac{T^2(f)}{2\pi^2} + (\varphi_1^2 + 1)\frac{f}{2}$.

En introduisant $T_1 = \frac{T}{\pi}$ il vient alors : $2T_1(\varphi_1 f) = T_1^2(f) + (\varphi_1^2 + 1)f$.

Nous allons maintenant pour des raisons de commodité travailler sur des morphismes agissant sur f sans donner de support précis, la seule contrainte étant que toutes les opérations mentionnées soient possibles à partir de f.

Si on veut une formulation plus académique, on pourra tout reprendre en réintroduisant la variable cachée f, mais l'essentiel des calculs apparaît plus clairement dans la démarche algébrique qui suit.

Si on note $a = T_1$, b le morphisme $f \longmapsto \varphi_1 \times f$, et 1 l'application identique, l'égalité précédente se simplifie en effet en : $\boxed{2ab = a^2 + b^2 + 1.}$ (F)

2. Des polynômes intéressants

À partir de (F) on montre facilement par récurrence le résultat suivant :

Pour tout entier n il existe un couple (A_n, B_n) de fonctions polynômes de degrés au plus $n+1$ tel que :

$ab^n = A_n(a) + B_n(b)$, avec le terme dominant de B_n égal à $\frac{n}{n+1}b^{n+1}$.

¬ La formule est vraie pour $n = 0$ avec $A_0(X) = X$ et $B_0(X) = 0$.

La formule est vraie pour $n = 1$ avec : $A_1(X) = \frac{X^2}{2}$ et $B_1(X) = \frac{X^2+1}{2}$.

¬ Supposons la vraie jusqu'à un ordre n. En multipliant à droite les deux termes de l'égalité (F) par b^n

on obtient : $2ab^{n+1} = a^2b^n + (b^2+1)b^n$.
De l'hypothèse de récurrence, on déduit immédiatement : $a^2b^n = aA_n(a) + aB_n(b)$.
Par combinaison des deux égalités précédentes : $2ab^{n+1} = aA_n(a) + aB_n(b) + (b^2+1)b^n$.

Or, toujours par hypothèse de récurrence : $B_n(b) = \sum_{k=0}^{k=n} \lambda_n^k b^k + \frac{n}{n+1} b^{n+1}$.

Ainsi : $aB_n(b) = \sum_{k=0}^{k=n} \lambda_n^k (A_k(a) + B_k(b)) + \frac{n}{n+1} ab^{n+1}$ (d'après $ab^k = A_k(a) + B_k(b)$), et par suite :

$2ab^{n+1} = aA_n(a) + \frac{n}{n+1} ab^{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n} \lambda_n^k (A_k(a) + B_k(b)) + (b^2+1)b^n$.

En regroupant les termes en ab^{n+1} on obtient

$\left(\frac{n+2}{n+1}\right) ab^{n+1} = aA_n(a) + \sum_{k=0}^{k=n} \lambda_n^k (A_k(a) + B_k(b)) + (b^2+1)b^n$.

Considérons alors les polynômes définis par : $$\boxed{\begin{aligned} A_{n+1}(X) &= \left(\frac{n+1}{n+2}\right)\left(XA_n(X) + \sum_{k=0}^{k=n} \lambda_n^k A_k(X)\right) \\ B_{n+1}(X) &= \left(\frac{n+1}{n+2}\right)\left((X^2+1)X^n + \sum_{k=0}^{k=n} \lambda_n^k B_k(X)\right) \end{aligned}}$$

Il est clair que $ab^{n+1} = A_{n+1}(a) + B_{n+1}(b)$ et que le terme dominant de $B_{n+1}(X)$ est $\left(\frac{n+1}{n+2}\right) X^{n+2}$.
Nous avons donc établi l'hérédité de la formule en question et par suite sa validité pour tout entier n.

3. Retour à l'opérateur T

Rappelons que $a = \frac{T}{\pi}$ et $f \longmapsto b(f) = \frac{\varphi_0}{\pi} \times f$.

Si on note $A_n(X) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_n^k X^k$ et $B_n(X) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k X^k$, l'égalité obtenue pour ab^n se traduit :

$$\boxed{T(\varphi_0^n f) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k} T^k(f) + \left(\sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \varphi_0^k\right) \times f.} \quad (\mathrm{F}_1)$$

¬ Application au calcul de $T(\varphi_0^n)$

Les relations de récurrence montrent clairement que $A_n(0) = 0$ pour tout entier n. On en conclut $\alpha_n^0 = 0$.
Ainsi si on prend $f = 1$ dans la relation précédente, on aura $T^k(f) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$ et il nous reste simplement :

$$\boxed{T(\varphi_0^n) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \varphi_0^k.} \quad (\mathrm{F}_2)$$

¬ Explicitation du terme constant de B_n

On va montrer que les coefficients λ_n^0 sont nuls lorsque n est pair et pour un exposant impair satisfont à la formule générale : $\boxed{\lambda_{2n-1}^0 = \frac{(4^n-1)(-1)^{n-1}\beta_{2n}}{n}}$ avec β_{2n} nombre de Bernoulli d'ordre $2n$.

Pour $x = \frac{1}{2}$, la formule (F_2) donne en effet, vu que $\varphi_0\left(\frac{1}{2}\right) = 0$: $\int_0^1 \frac{\varphi_0^n(t)}{t - \frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \lambda_n^0 \pi^{n+1}$.

Or en posant $x = \frac{t}{1-t}$: $\int_0^1 \frac{\varphi_0^n(t)}{t-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(x)\,\mathrm{d}x}{x^2-1} = 2\int_0^1 (1 + (-1)^{n+1}) \frac{\ln^n(x)\,\mathrm{d}x}{x^2-1}$.

Lorsque n est impair, on retrouve une intégrale classique qui nous donne la formule en question.

En effet : $4\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^{2n-1}(x)\,\mathrm{d}x}{x^2-1} = \frac{(4^n-1)(-1)^{n-1}\beta_{2n}}{n}\pi^{2n}$.

¬ **Application au calcul des intégrales de φ_0^n sur $[0,1]$**

On prend ici $f(x)=x$. On a $T(x)=1$ et pour $k \geqslant 2$, $T^k(x)=0$.

Il reste donc d'après la formule (F_1) : $T(\varphi_0^n \times x) = \alpha_n^1\pi^n + \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k}\varphi_0^k\right) \times x$.

Or on se rappelle que $T(x \times f(x)) = x \times T(f(x)) + \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi on peut calculer : $T(x\times\varphi_0^n) = x\times T(\varphi_0^n) + \displaystyle\int_0^1 \varphi_0^n(x)\,\mathrm{d}x = x\times\left(\sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k\pi^{n+1-k}\varphi_0^k\right) + \int_0^1 \varphi_0^n(x)\,\mathrm{d}x$.

En comparant les deux modes de calcul, il vient simplement : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \varphi_0^n(x)\,\mathrm{d}x = \alpha_n^1\pi^n.}$

On sait en fait évaluer cette intégrale par la méthode des résidus. Elle fait apparaître les nombres dits **cosécants**.

Plus précisément on aura pour un indice pair : $\boxed{\alpha_{2n}^1 = (-1)^{n+1}2(2^{2n-1}-1)\beta_{2n}}$, avec β_{2n} nombre de Bernoulli d'ordre $2n$.

On a donc dans cette nouvelle méthode une apparition originale de ces nombres de Bernoulli, couplée avec le calcul effectif des intégrales en question.

¬ **Généralisation au calcul des intégrales de $\varphi_0^n(x)f(x)$**

Rappelons que si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$:

$T(xf(x)) = xT(f(x)) + \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \,;\, \ldots;\, T^n(xf(x)) = xT^n(f(x)) + \int_0^1 T^{n-1}(f(x))\,\mathrm{d}x$.

On peut alors calculer $T(\varphi_0^n(x)xf(x))$ de deux manières :

– Par la formule (1) : $T(\varphi_0^n(x)xf(x)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \alpha_n^k\pi^{n+1-k}T^k(xf(x)) + (\sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k\pi^{n+1-k}\varphi_0^k(x))\times xf(x)$.

– Par la formule (2) : $T(x\varphi_0^n(x)f(x)) = xT(\varphi_0^n(x)f(x)) + \displaystyle\int_0^1 \varphi_0^n(x)f(x)\,\mathrm{d}x$.

Or $T(\varphi_0^n(x)f(x)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \alpha_n^k\pi^{n+1-k}T^k(f(x)) + (\sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k\pi^{n+1-k}\varphi_0^k(x))\times f(x)$ et pour tout k élément de $\{1,\ldots,n-1\}$: $T^k(xf(x)) = xT^k(f(x)) + \displaystyle\int_0^1 T^{k-1}(f(x))\,\mathrm{d}x$. On obtient donc :

(1) : $T(\varphi_0^n(x)xf(x)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \alpha_n^k\pi^{n+1-k}[xT^k(f(x)) + \int_0^1 T^{k-1}(f(x))\,\mathrm{d}x] + (\sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k\pi^{n+1-k}\varphi_0^k(x))xf(x)$

(2) : $T(\varphi_0^n(x)xf(x)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \alpha_n^k\pi^{n+1-k}xT^k(f(x)) + (\sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k\pi^{n+1-k}\varphi_0^k(x))xf(x) + \int_0^1 \varphi_0^n(x)f(x)\,\mathrm{d}x$.

Par comparaison des deux modes de calcul on obtient donc la formule généralisant celle du paragraphe précédent :

$$\boxed{\int_0^1 \varphi_0^n(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{k=n+1} \alpha_n^k\pi^{n+1-k}\int_0^1 T^{k-1}(f(x))\,\mathrm{d}x.} \quad (\mathsf{F}_3)$$

¬ **Cas particulier de la fonction $x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{x+a}$**

Cette fonction est vecteur propre de T, avec la valeur propre $\gamma_a = \ln\left(\dfrac{a}{1+a}\right)$.

On aura donc pour tout $k \geqslant 1$: $T^k(f(x)) = (\gamma_a)^k f(x)$.

On en déduit aussitôt : $\displaystyle\int_0^1 T^{k-1}(f(x))\,\mathrm{d}x = (\gamma_a)^{k-1}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = -(\gamma_a)^k$.

La formule (F_3) établie ci dessus donne alors dans ce cas particulier :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\varphi_0^n(x)}{x+a}\mathrm{d}x = -\sum_{k=1}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k}(\gamma_a)^k = -\pi^{n+1} A_n\left(\frac{\gamma_a}{\pi}\right).} \quad (F_4)$$

Si on effectue le changement de variable $t = \dfrac{x}{1-x}$, l'égalité ci dessus se traduit : $\dfrac{1}{1+a}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln^n(t)\,\mathrm{d}t}{(1+t)(t+\frac{a}{1+a})} = -\pi^{n+1}A_n\left(\frac{\gamma_a}{\pi}\right)$. Si on pose $z = \gamma_a = \ln(\dfrac{a}{1+a})$, on obtient l'égalité :

$$\boxed{(1-e^z)\int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t)\,\mathrm{d}t}{(t+1)(t+e^z)} = -\pi^{n+1}A_n\left(\frac{z}{\pi}\right).} \quad (F_5)$$

4. Étude des puissances de la transformation T

Nous reprenons la formule $\boxed{2ab = a^2 + b^2 + 1.}$ (F)

Par une récurrence analogue à celle développée pour le calcul de ab^n, on peut démontrer que $a^n b$ est du type :

$a^n b = L_n(a) + M_n(b)$ avec L_n et M_n polynômes de sources : $\left\{\begin{array}{ll} L_0(a) = 0 & M_0(b) = b \\ L_1(a) = \dfrac{a^2+1}{2} & M_1(b) = \dfrac{b^2}{2} \end{array}\right\}$.

Et les relations de récurrence suivantes : Si on pose $L_n(a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+1} \omega_n^k a^k$ et $M_n(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+1} \beta_n^k b^k$.

$L_{n+1}(X) = (\dfrac{n+1}{n+2})[(X^2+1)X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \omega_n^k L_k(X)]$; $M_{n+1}(X) = (\dfrac{n+1}{n+2})[XM_n(X) + \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \omega_n^k M_k(X)]$.

En comparant avec les modes de génération des polynômes A_n et B_n on voit très clairement que pour tout entier n : $L_n(X) = B_n(X)$ et $M_n(X) = A_n(X)$.

En revenant aux définitions explicites des opérateurs a et b, il vient alors :

$\dfrac{T^n}{\pi^n}(\dfrac{\varphi_0}{\pi} \times f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \frac{T^k(f)}{\pi^k} + (\sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_n^k \frac{\varphi_0^k}{\pi^k}) \times f$, soit après simplifications :

$$\boxed{T^n(\varphi_0 \times f) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} T^k(f) + (\sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k}\varphi_0^k) \times f.} \quad (F_6)$$

En particulier, pour $f = 1$, il reste simplement :

$$\boxed{T^{(n)}(\varphi_0) = \lambda_n^0 \pi^{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k}\varphi_0^k.} \quad (F_7)$$

En calculant alors comme on l'a fait précédemment $T^n(\varphi_0 \times f \times x)$ de deux manières, on obtient une formule similaire pour les intégrales sur $[0,1]$ des $T^k(\varphi_0 \times f)$, soit :

$$\boxed{\int_0^1 T^{n-1}(\varphi_0(x)f(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \int_0^1 T^{k-1}(f(x))\,\mathrm{d}x.} \quad (F_8)$$

Ici encore, pour $f = 1$, il reste :

$$\boxed{\int_0^1 T^{n-1}(\varphi_0(x))\,\mathrm{d}x = \lambda_n^1 \pi^n.} \quad (F_9)$$

En combinant (F_7) et (F_9) il vient : $\lambda_{n+1}^1 \pi^{n+1} = \int_0^1 T^n(\varphi_0(x))\,\mathrm{d}x = \lambda_n^0 \pi^{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k} \int_0^1 \varphi_0^k(x)\,\mathrm{d}x$.

En se rappelant que $\int_0^1 \varphi_0^k(x)\,\mathrm{d}x = \alpha_k^1 \pi^k$ on obtient alors l'égalité : $\boxed{\lambda_{n+1}^1 - \lambda_n^0 = \sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_n^k \alpha_k^1.}$

Voici les premiers polynômes des familles étudiées :

$A_0(X) = X;\ A_1(X) = \dfrac{X^2}{2};\ A_2(X) = \dfrac{X^3+X}{3};\ A_3(X) = \dfrac{X^4+2X^2}{4};\ A_4(X) = \dfrac{3X^5+10X^3+7X}{15}.$

$A_5(X) = \dfrac{X^6+5X^4+7X^2}{6};\quad A_6(X) = \dfrac{3X^7+21X^5+49X^3+31X}{21}.$

$A_7(X) = \dfrac{X^8}{8} + \dfrac{7}{6}X^6 + \dfrac{49}{12}X^4 + \dfrac{31}{6}X^2;\quad A_8(X) = \dfrac{X^9}{9} + \dfrac{4}{3}X^7 + \dfrac{98}{15}X^5 + \dfrac{124}{9}X^3 + \dfrac{127}{15}X.$

$B_0(X) = 0;\quad B_1(X) = \dfrac{X^2+1}{2};\quad B_2(X) = \dfrac{2X^3+2X}{3};\quad B_3(X) = \dfrac{3X^4+4X^2+1}{4}.$

$B_4(X) = \dfrac{4}{5}X^5 + \dfrac{4}{3}X^3 + \dfrac{8}{15}X;\quad B_5(X) = \dfrac{5}{6}X^6 + \dfrac{5}{3}X^4 + \dfrac{4}{3}X^2 + \dfrac{1}{2}.$

$B_6(X) = \dfrac{6}{7}X^7 + 2X^5 + \dfrac{8}{3}X^3 + \dfrac{32}{21}X;\quad B_7(X) = \dfrac{7}{8}X^8 + \dfrac{7}{3}X^6 + \dfrac{14}{3}X^4 + \dfrac{16}{3}X^2 + \dfrac{17}{8}.$

On en déduit en particulier en utilisant l'identité $\boxed{\int_0^1 \varphi_0^n(x)\,\mathrm{d}x = \alpha_n^1 \pi^n}$ obtenue dans le paragraphe 3, les intégrales suivantes :

$\boxed{\int_0^1 \ln^4\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{15}\pi^4}$; $\boxed{\int_0^1 \ln^6\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{31}{21}\pi^6}$; $\boxed{\int_0^1 \ln^8\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{127}{15}\pi^8}$; etc...

5. Une autre génération des polynômes A_n

Nous partons de la formule (F_5) : $\pi^{n+1} A_n\left(\frac{z}{\pi}\right) = (e^z - 1)\int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t)\,\mathrm{d}t}{(t+1)(t+e^z)}$.

Posons $J_n(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t)\,\mathrm{d}t}{(t+1)(t+e^z)}$.

La méthode des résidus permet d'évaluer facilement de proche en proche ces intégrales classiques. On établit en effet grâce à un contour bien choisi le résultat suivant :

Si f_n est une fonction du type $t \longmapsto f_n(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}\ln^n(t)$ avec P et Q polynômes tels que $\mathrm{degre}(Q) \geqslant \mathrm{degre}(P)+2$ et si Q n'admet pas de racines réelles positives, alors si on pose $J_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et si on désigne par $z_1, z_2, \ldots, z_q$ les racines de Q, on obtient l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} C_n^k (2i\pi)^{n-k} J_k = -2i\pi \sum_{k=1}^{k=q} \mathrm{Res}(f_n, z_k).$$

Pour ce qui nous concerne, Q admet deux racines -1 et -e^z, et les résidus en ces points sont :

Res$(f_n, -1) = \dfrac{Log^n(-1)}{e^z-1} = \dfrac{(i\pi)^n}{e^z-1}$ et Res$(f_n, -e^z) = \dfrac{Log^n(-e^z)}{1-e^z} = \dfrac{(z+i\pi)^n}{1-e^z}$.

(En effet le contour choisi appelle une détermination principale du logarithme choisie dans l'intervalle $]0{,}2\pi[$)
Pour les détails voir par exemple l'ouvrage de J.Lelong-Ferrand et J.M.Arnaudiès : Cours de mathématiques Tome 4 Equations différentielles et intégrales multiples. Dunod Université. Pages 395-397.

On obtient donc ici après simplifications : $\sum_{k=0}^{k=n-1} C_n^k (2i)^{n-(k+1)} A_k\left(\frac{z}{\pi}\right) = \left(\frac{z}{\pi} + \mathrm{i}\right)^n - (i)^n$.

En posant $X = \frac{z}{\pi}$ et par décalages d'indices, on peut alors écrire :

$$\sum_{k=0}^{k=n+1} C_{n+2}^k (2i)^{n+1-k} A_k(X) = (X+i)^{n+2} - (i)^{n+2}.$$

Ceci nous permet donc d'évaluer nos polynômes A_n à partir de $A_0(X) = X$ grâce à la relation de récurrence suivante :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1}(X) = \frac{1}{n+2}[(X+i)^{n+2} - (i)^{n+2} - \sum_{k=0}^{k=n} C_{n+2}^k (2i)^{n+1-k} A_k(X)].}$$

Les calculs effectués redonnent bien les polynômes déjà évalués précédemment.

```
> A[0]:=X;
```

$$A_0 := X$$

```
> Sumo:=proc(n)
> local k,S;
> S:=0; for k from 0 to n do
> S:=simplify(S+binomial(n+2,k)*((2*I)^(n+1-k))*A[k]);od;S;end;
> for n from 0 to 11 do A[n+1]:=sort(simplify((1/(n+2))*((X+I)^(n+2)
>                                         -(I)^(n+2)-Sumo(n))));end;
```

$$1/2\,X^2 + iX - iA_0$$

$$1/3\,X^3 + X - 2/3\,A_0$$

$$1/4\,X^4 + 1/2\,X^2$$

$$1/5\,X^5 + 2/3\,X^3 + X - \tfrac{8}{15}\,A_0$$

$$1/6\,X^6 + 5/6\,X^4 + 7/6\,X^2$$

$$1/7\,X^7 + X^5 + 7/3\,X^3 + 3\,X - \tfrac{32}{21}\,A_0$$

$$1/8\,X^8 + 7/6\,X^6 + \tfrac{49}{12}\,X^4 + \tfrac{31}{6}\,X^2$$

$$1/9\,X^9 + 4/3\,X^7 + \tfrac{98}{15}\,X^5 + \tfrac{124}{9}\,X^3 + 17\,X - \tfrac{128}{15}\,A_0$$

$$1/10\,X^{10} + 3/2\,X^8 + \tfrac{49}{5}\,X^6 + 31\,X^4 + \tfrac{381}{10}\,X^2$$

$$1/11\,X^{11} + 5/3\,X^9 + 14\,X^7 + 62\,X^5 + 127\,X^3 + 155\,X - \tfrac{2560}{33}\,A_0$$

$$1/12\,X^{12} + \tfrac{11}{6}\,X^{10} + \tfrac{77}{4}\,X^8 + \tfrac{341}{3}\,X^6 + \tfrac{1397}{4}\,X^4 + \tfrac{2555}{6}\,X^2$$

$$1/13\,X^{13} + 2\,X^{11} + \tfrac{77}{3}\,X^9 + \tfrac{1364}{7}\,X^7 + \tfrac{4191}{5}\,X^5 + \tfrac{5110}{3}\,X^3 + 2073\,X - \tfrac{1415168}{1365}\,A_0$$

6. Rapports entre les deux familles de polynômes

Nous partons ici de la formule (F_2) : $T(\varphi_0^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \varphi_0^k$.

Cela se traduit : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^n\left(\frac{u}{1-u}\right) - \ln^n\left(\frac{x}{1-x}\right)}{u-x} du = \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \ln^k\left(\frac{x}{1-x}\right)$ sur $]0,1[$.

Par changement de variables $z = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ et $t = \dfrac{u}{1-u}$, il vient après simplifications :

$(e^z+1)\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t) - z^n}{(1+t)(t-e^z)} \mathrm{d}t = \pi^{n+1} B_n\left(\frac{z}{\pi}\right)$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{C}$ par prolongement analytique.

En posant $z = z + \mathrm{i}\pi$ on obtient : $(1-\mathrm{e}^z)\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t) - (z+i\pi)^n}{(1+t)(t+e^z)} \mathrm{d}t = \pi^{n+1} B_n\left(\frac{z}{\pi} + \mathrm{i}\right)$.

Or par un calcul évident : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(t+\mathrm{e}^z)} = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$.

On en déduit l'égalité suivante : $(1-e^z)\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t)\mathrm{d}t}{(1+t)(t+e^z)} = \pi^{n+1}\left[B_n\left(\frac{z}{\pi} + \mathrm{i}\right) - \frac{z}{\pi}\left(\frac{z}{\pi} + \mathrm{i}\right)^n\right]$.

Or on a établi précédemment lors de l'étude des polynômes A_n une formule similaire, soit :

$(1-e^z)\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln^n(t)\mathrm{d}t}{(1+t)(t+e^z)}=-\pi^{n+1}A_n\left(\frac{z}{\pi}\right)$ (F$_5$).

La comparaison des deux formules ci dessus donne un lien élémentaire entre les deux polynômes.
On voit que pour tout entier n : $B_n\left(\frac{z}{\pi}+\mathrm{i}\right)=\frac{z}{\pi}\left(\frac{z}{\pi}+\mathrm{i}\right)^n-A_n\left(\frac{z}{\pi}\right)$, ou encore, en posant $X=\frac{z}{\pi}+\mathrm{i}$:

$$\boxed{B_n(X)=(X-\mathrm{i})X^n-A_n(X-\mathrm{i}).}$$

Cette relation peut se déduire en fait directement de la formule algébrique (F) dans le cas où a et b sont des complexes avec $a=X-\mathrm{i}$; $b=X$. Mais ce qui suit justifie l'approche intégrale.
De l'égalité $(e^z+1)\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln^n(t)-z^n}{(1+t)(t-e^z)}\mathrm{d}t=\pi^{n+1}B_n\left(\frac{z}{\pi}\right)$ on peut en dérivant par rapport à z en 0, trouver l'expression du coefficient de degré 1 dans B_n , soit : λ_n^1.

$$\pi^n B'(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln^n(t)}{(1+t)(t-1)}\mathrm{d}t+2\int_0^{+\infty}\frac{\ln^n(t)}{(1+t)(t-1)^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\ln^n(t)}{(t-1)^2}\mathrm{d}t.$$

Cette intégrale classique est nulle pour n impair et conduit pour les indices pairs à l'expression en fonction des nombres de Bernoulli : $\boxed{\lambda_{2n}^1=-(-4)^n\beta_{2n}.}$

```
> A[1]:=X*X/2;B[1]:=(X*X+1)/2;A[0]:=X;B[0]:=0;
```

$$A_1 := 1/2\,X^2$$
$$B_1 := 1/2\,X^2+1/2$$
$$A_0 := X$$
$$B_0 := 0$$

```
> for n from 1 to 13 do B[n+1]:=simplify(((n+1)/(n+2))*((X^n)*(X*X+1)
>                                  +sum(coeff(B[n],X,k)*B[k],k=0..n)));od;
```

$$B_2 := 2/3\,X\left(X^2+1\right)$$
$$B_3 := 3/4\,X^4+X^2+1/4$$
$$B_4 := 4/5\,X^5+4/3\,X^3+\tfrac{8}{15}\,X$$
$$B_5 := 5/6\,X^6+5/3\,X^4+1/2+4/3\,X^2$$
$$B_6 := 6/7\,X^7+2\,X^5+8/3\,X^3+\tfrac{32}{21}\,X$$
$$B_7 := \tfrac{7}{8}\,X^8+7/3\,X^6+\tfrac{17}{8}+16/3\,X^2+14/3\,X^4$$
$$B_8 := \tfrac{8}{9}\,X^9+8/3\,X^7+\tfrac{128}{9}\,X^3+\tfrac{128}{15}\,X+\tfrac{112}{15}\,X^5$$
$$B_9 := \tfrac{9}{10}\,X^{10}+3\,X^8+\tfrac{31}{2}+\tfrac{192}{5}\,X^2+32\,X^4+\tfrac{56}{5}\,X^6$$
$$B_{10} := \tfrac{10}{11}\,X^{11}+10/3\,X^9+128\,X^3+\tfrac{2560}{33}\,X+64\,X^5+16\,X^7$$
$$B_{11} := \tfrac{11}{12}\,X^{12}+11/3\,X^{10}+\tfrac{1280}{3}\,X^2+\tfrac{352}{3}\,X^6+352\,X^4+22\,X^8+\tfrac{691}{4}$$
$$B_{12} := \tfrac{12}{13}\,X^{13}+4\,X^{11}+\tfrac{1415168}{1365}\,X+\tfrac{5120}{3}\,X^3+\tfrac{1408}{7}\,X^7+\tfrac{4224}{5}\,X^5+\tfrac{88}{3}\,X^9$$
$$B_{13} := \tfrac{13}{14}\,X^{14}+13/3\,X^{12}+\tfrac{707584}{105}\,X^2+\tfrac{9152}{5}\,X^6+\tfrac{16640}{3}\,X^4+\tfrac{2288}{7}\,X^8+\tfrac{572}{15}\,X^{10}+\tfrac{5461}{2}$$
$$B_{14} := \tfrac{14}{15}\,X^{15}+14/3\,X^{13}+\tfrac{57344}{3}\,X+\tfrac{1415168}{45}\,X^3+\tfrac{18304}{5}\,X^7+\tfrac{46592}{3}\,X^5+\tfrac{4576}{9}\,X^9+\tfrac{728}{15}\,X^{11}$$

```
> for n from 1 to 13 do
> A[n+1]:=simplify(((n+1)/(n+2))*(X*A[n]+sum(coeff(B[n],X,k)*A[k],k=0..n)));od;
```

$$A_2 := 1/3\,X^3+1/3\,X$$
$$A_3 := 1/4\,X^4+1/2\,X^2$$
$$A_4 := 1/5\,X^5+2/3\,X^3+\tfrac{7}{15}\,X$$
$$A_5 := 1/6\,X^6+5/6\,X^4+7/6\,X^2$$
$$A_6 := 1/7\,X^7+X^5+7/3\,X^3+\tfrac{31}{21}\,X$$

$$A_7 := 1/8\,X^8 + 7/6\,X^6 + \tfrac{49}{12}\,X^4 + \tfrac{31}{6}\,X^2$$
$$A_8 := 1/9\,X^9 + 4/3\,X^7 + \tfrac{98}{15}\,X^5 + \tfrac{124}{9}\,X^3 + \tfrac{127}{15}\,X$$
$$A_9 := 1/10\,X^{10} + 3/2\,X^8 + \tfrac{49}{5}\,X^6 + 31\,X^4 + \tfrac{381}{10}\,X^2$$
$$A_{10} := 1/11\,X^{11} + 5/3\,X^9 + 14\,X^7 + 62\,X^5 + 127\,X^3 + \tfrac{2555}{33}\,X$$
$$A_{11} := 1/12\,X^{12} + \tfrac{11}{6}\,X^{10} + \tfrac{77}{4}\,X^8 + \tfrac{341}{3}\,X^6 + \tfrac{1397}{4}\,X^4 + \tfrac{2555}{6}\,X^2$$
$$A_{12} := 1/13\,X^{13} + 2\,X^{11} + \tfrac{77}{3}\,X^9 + \tfrac{1364}{7}\,X^7 + \tfrac{4191}{5}\,X^5 + \tfrac{5110}{3}\,X^3 + \tfrac{1414477}{1365}\,X$$
$$A_{13} := 1/14\,X^{14} + \tfrac{13}{6}\,X^{12} + \tfrac{1001}{30}\,X^{10} + \tfrac{4433}{14}\,X^8 + \tfrac{18161}{10}\,X^6 + \tfrac{33215}{6}\,X^4 + \tfrac{1414477}{210}\,X^2$$
$$A_{14} := 1/15\,X^{15} + 7/3\,X^{13} + \tfrac{637}{15}\,X^{11} + \tfrac{4433}{9}\,X^9 + \tfrac{18161}{5}\,X^7 + \tfrac{46501}{3}\,X^5 + \tfrac{1414477}{45}\,X^3 + \tfrac{57337}{3}\,X$$

C. Transformée par T d'une fonction dérivée

1. Formule de transfert

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0{,}1]$: $\boxed{T(f'(x)) = [T(f(x)]' + \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} - \dfrac{f(x)-f(0)}{x}.}$ (1)

Par définition de $g = T(f)$: $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\,\mathrm{d}t$.

f étant supposée de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0{,}1]$, le théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique ici et conduit à : $g'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f'(x)(x-t)-(f(x)-f(t))}{(x-t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Écrivons alors : $g'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f'(x)-f'(t)}{x-t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{f'(x)(x-t)-(f(x)-f(t))}{(x-t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Soit encore : $g'(x) = T(f'(x)) + \left[\dfrac{f(t)-f(x)}{x-t}\right]_0^1 = T(f'(x)) + \dfrac{f(1)-f(x)}{x-1} - \dfrac{f(0)-f(x)}{x}$.

Ceci donne bien la formule de transfert annoncée.

2. Une première application

Rappelons que pour f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0{,}1]$: $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(x)\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x}$ (1)

Si f est supposée de classe $\mathscr{C}^2$ notons $g_1 = T(f')$, définie d'après ce qui précède par :
$g_1(x) = g'(x) + \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} - \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

En appliquant la formule (1) à la fonction f' on obtient :
$$\int_0^1 f'(x)\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(g(1)-g(0) + \int_0^1 \frac{f(x)-f(1)}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{f(x)-f(0)}{x}\,\mathrm{d}x\right).$$

Soit par définition même de g : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f'(x)\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x = g(1)-g(0).}$

3. Itérations successives

La formule ci dessus se généralise sous la forme suivante, à l'aide d'une démonstration par récurrence.
Théorème : *Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$, avec $n \geqslant 1$:*

$$\int_0^1 f^{(n)}(x)\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x = g^{(n-1)}(1) - g^{(n-1)}(0) + H_{n-1}[f^{(n-1)}(1) + f^{(n-1)}(0)] + \sum_{k=0}^{k=n-2} \alpha_n^k[f^{(k)}(0) + (-1)^{n+k+1}f^{(k)}(1)]$$

Avec $H_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ et $\alpha_n^k = (n-k-2)![1+(-1)^{n-k}] + \sum_{j=0}^{j=k-1} \frac{(n-2-j)!}{(k-j)!}$; $\alpha_{n+1}^k = \alpha_n^{k-1} + \frac{(n-1)!}{k!}$.
Le point central de la démonstration est l'étude des dérivées successives des fonctions
$x \longmapsto q_0(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ et $x \longmapsto q_1(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.
Il suffit en fait de faire l'étude pour q_0, puis d'utiliser un changement de variable élémentaire.
Si on suppose f de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$, Leibniz donne sur $]0,1]$:
$q_0^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n![f(x)-f(0)]}{x^{n+1}} + \sum_{k=0}^{k=n-1} C_n^k(-1)^k k! \frac{f^{(n-k)}(x)}{x^{k+1}}$.
Pour l'étude en 0, écrivons $q_0(x) = \int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t$. Il vient alors par dérivations successives sous l'intégrale :
Pour tout $k \in \{0,\ldots, n-1\}$: $q_0^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(xt)\mathrm{d}t$.
Donc à l'origine : $q_0^{(k)}(0) = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}$. On obtient de même pour q_1 :
Sur $[0,1[$, $q_1^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n![f(x)-f(1)]}{(x-1)^{n+1}} + \sum_{k=0}^{k=n-1} C_n^k(-1)^k k! \frac{f^{(n-k)}(x)}{(x-1)^{k+1}}$ et $q_1^{(k)}(1) = \frac{f^{(k+1)}(1)}{k+1}$.
Supposons alors la formule en question vraie à l'ordre n et examinons pour une fonction f de classe C^{n+1} sur $[0,1]$ l'intégrale $I_{n+1} = \int_0^1 f^{(n+1)}(x)\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$.
D'après l'hypothèse de récurrence, et puisque f' est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$ on pourra écrire :
$I_{n+1} = g_1^{(n-1)}(1) - g_1^{(n-1)}(0) + H_{n-1}[f^{(n)}(1) + f^{(n)}(0)] + \sum_{k=0}^{k=n-2} \alpha_n^k[f^{(k+1)}(0) + (-1)^{n+k+1}f^{(k+1)}(1)]$.
avec $g_1 = T(f')$ définie par $g_1(x) = g'(x) + q_1(x) - q_0(x)$.
On en déduit avec ce qui précède :
$g_1^{(n-1)}(1) = g^{(n)}(1) + \frac{f^{(n)}(1)}{n} - (-1)^{n-1}(n-1)![f(1)-f(0)] - \sum_{k=0}^{k=n-2} C_{n-1}^k(-1)^k k! f^{(n-1-k)}(1)$.
$g_1^{(n-1)}(0) = g^{(n)}(0) + (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{f(0)-f(1)}{(-1)^n} + \sum_{k=0}^{k=n-2} C_{n-1}^k(-1)^k k! \frac{f^{(n-1-k)}(0)}{(-1)^{k+1}} - \frac{f^{(n)}(0)}{n}$.
Commençons par regrouper $H_{n-1}[f^{(n)}(1) + f^{(n)}(0)] + \frac{f^{(n)}(1)}{n} + \frac{f^{(n)}(0)}{n} = H_n[f^{(n)}(1) + f^{(n)}(0)]$.
Puis écrivons :

$$\sum_{k=0}^{k=n-2} C_{n-1}^k(-1)^k k! f^{(n-1-k)}(1) = \sum_{q=0}^{q=n-2} C_{n-1}^{n-2-q}(-1)^{n-2-q}(n-2-q)! f^{(q+1)}(1)$$

$$= (-1)^n(n-1)! \sum_{q=0}^{q=n-2} \frac{(-1)^q f^{(q+1)}(1)}{(q+1)!}$$

$\sum_{k=0}^{k=n-2} C_{n-1}^{k} k! f^{(n-1-k)}(0) = (n-1)! \sum_{q=0}^{q=n-2} \frac{f^{(q+1)}(0)}{(q+1)!}$. Après regroupements on obtient :
$I_{n+1} = g^{(n)}(1) - g^{(n)}(0) + H_n[f^{(n)}(1) + f^{(n)}(0)] + S_{n+1}$ avec S_{n+1} définie par :
$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{k=n-1} (\alpha_n^{k-1} + \frac{(n-1)!}{k!})[f^{(k)}(0) + (-1)^{n+2+k} f^{(k)}(1)] + (n-1)!(1+(-1)^{n+1})[f(0) - f(1)]$.

Il suffit alors de poser pour $k \geqslant 1$, $\alpha_{n+1}^{k} = \alpha_n^{k-1} + \frac{(n-1)!}{k!}$ et $\alpha_{n+1}^{0} = (n-1)![1+(-1)^{n+1}]$ pour obtenir la formule souhaitée à l'ordre suivant $n+1$.
Voici le tableau des premiers coefficients.

$n \downarrow k \rightarrow$	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
2	2						
3	0	3					
4	4	2	4				
5	0	10	5	5			
6	48	24	22	9	6		
7	0	168	84	42	14	7	
8	420	720	528	204	72	20	8

Explicitation des coefficients

On établit facilement par télescopage $\alpha_n^k = (n-k-2)![1+(-1)^{n-k}] + \sum_{j=0}^{j=k-1} \frac{(n-2-j)!}{(k-j)!}$.

L'analyse des différences premières sur les diagonales suggère une formule synthétique que l'on décode assez facilement sur les premiers termes et que l'on peut prouver ensuite facilement à l'aide de la relation de récurrence générant les α_n^k.

$$\boxed{\alpha_n^k = (n-k-2)![C_{n-1}^k + (-1)^{n-k}].}$$

¬ **Une première application :**

Pour $f(x) = x^n$ on obtient la formule originale : $\boxed{H_n = 1 + \sum_{k=0}^{k=n-2} \frac{(-1)^{n-k} C_{n-1}^k}{(n-k)(n-k-1)}.}$

¬ **Calcul des coefficients de Fourier de la réductrice**

On se rappelle qu'une base orthonormale de *H* est donnée par les polynômes de Legendre normalisés, s'écrivant :

$$P_n(x) = \frac{\sqrt{2n+1}}{n!} f_n^{(n)}(x), \text{ avec } f_n(x) = x^n(1-x)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^k x^{n+k}.$$

La transformée par T de f_n est égale à

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^k \sum_{j=0}^{j=n+k-1} \frac{x^j}{n+k-j} = \sum_{j=0}^{j=2n-1} \left(\sum_{k=j+1-n}^{k=n} \frac{(-1)^k C_n^k}{n+k-j} \right) x^j.$$

On en déduit $g_n^{(n-1)}(0) = (n-1)! \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{(n-1)!}{n+1}$.
Or on vérifie facilement que pour tout polynôme f, $T(f(1-x)) = -[T(f)](1-x)$.
La fonction f_n étant symétrique par rapport au milieu de [0,1], on en déduit donc que $g_n(x) = -g_n(1-x)$ et par suite que $g_n^{(n-1)}(1) = (-1)^n g^{(n-1)}(0)$.
Ainsi par application du théorème établi précédemment, on en déduit :

$$\int_0^1 f_n^{(n)}(x)\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{2(n-1)!}{n+1} \text{ si } n \text{ est impair.}\end{cases}$$

En effet toutes les dérivées successives intervenant pour f_n sont nulles en 0 et 1.

Etudions alors les moments de la réductrice φ.

Par définition : $\lambda_n = <\varphi \mid P_n>_\rho = \dfrac{2\sqrt{2n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1 f_n^{(n)}(x)\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x.$

On en déduit : $\lambda_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{4\sqrt{2n+1}}{n(n+1)} \text{ si } n \text{ est impair.}\end{cases}$

Ainsi dans $\mathscr{L}^2([0,1])$ on a le développement dans la base des polynômes de Legendre :

$$\boxed{\varphi_0(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = -\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\sqrt{4n+3}}{(2n+1)(n+1)}P_{2n+1}(x).}$$

On en déduit par exemple les égalités suivantes :

¬ En utilisant $\|\varphi_0\|^2 = \displaystyle\int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)dx = \frac{\pi^2}{3}$, il vient : $\boxed{\dfrac{\pi^2}{3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(4n+3)}{(2n+1)^2(n+1)^2}.}$

¬ En utilisant $<\varphi_0(x) \mid x^k> = \dfrac{H_k}{k+1}$ et $P_{2n+1}(x) = \sqrt{4n+3}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n+1}(-1)^k C_{2n+1}^k C_{2n+1+k}^k x^k.$

Quel que soit l'entier n : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n+1}(-1)^k C_{2n+1}^k C_{2n+1+k}^k\frac{H_k}{k+1} = \frac{-1}{(2n+1)(n+1)}.}$

L'utilisation de produits scalaires avec la réductrice peut conduire à des égalités étonnantes.

Considérons une fonction f de $\mathscr{L}^2([0,1])$ dont on connaît les coefficients de Fourier $c_n(f)$ relativement à la base des polynômes de Legendre $P_n(x) = \dfrac{\sqrt{2n+1}}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n(1-x)^n)$.

De $\begin{cases} f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n(f)P_n(x) \\ \varphi(x) = -2\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\sqrt{4n+3}}{(2n+1)(n+1)}P_{2n+1}(x)\end{cases}$ on déduit par produit scalaire :

$$<\varphi \mid f> = <\frac{\rho}{\mu} \mid T(f)>_\mu = \int_0^1\int_0^1 \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\sqrt{4n+3}}{(2n+1)(n+1)}c_{2n+1}(f).$$

Or les coefficients de Fourier s'évaluent facilement par intégrations par parties successives.

On obtient : $c_{2n+1}(f) = -\dfrac{\sqrt{4n+3}}{(2n+1)!}\displaystyle\int_0^1 f^{(2n+1)}(x)[x(1-x)]^{2n+1}\mathrm{d}x.$

Ceci nous donne :

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{4n+3}{(2n+1)!(2n+1)(n+1)}\int_0^1 f^{(2n+1)}(x)[x(1-x)]^{2n+1}\mathrm{d}x.$$

Examinons le cas d'une fonction puissance $f(x) = x^\alpha$, avec $\alpha > -1$.

On obtient facilement par intervention des fonctions Eulériennes :

$$\int_0^1 f^{(2n+1)}(x)[x(1-x)]^n\mathrm{d}x = (2n+1)!\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{k=2n}(\alpha-k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{k=2n+2}(\alpha+k)}.$$

D'où $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{4n+3}{(2n+1)(n+1)}\times u(n,\alpha)$ en posant $u(n,\alpha)=\dfrac{\prod_{k=0}^{k=2n}(\alpha-k)}{\prod_{k=1}^{k=2n+2}(\alpha+k)}$.

Le cas particulier $\alpha=\dfrac{1}{2}$ est intéressant, il conduit à l'égalité : $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}u_n$, les rationnels u_n étant générés par : $\begin{cases} u_0=\dfrac{2}{5} \\ u_{n+1}=\dfrac{(4n+1)(2n+1)(n+1)}{(4n+9)(2n+3)(n+2)}\times u_n \end{cases}$

Ces fractions sous forme irréductibles ont un numérateur valant alternativement 2 ou 1.

Ainsi $u_{2n}=\dfrac{2}{a_n}$ et $u_{2n+1}=\dfrac{1}{b_n}$ avec pour premières valeurs des dénominateurs :

$a_0=5$, $a_1=1755$, $a_2=16065$, $a_3=65975$, $a_4=186813$, $a_5=426195$, $a_6=844025,\ldots$

$b_0=135$, $b_1=3094$, $b_2=17325$, $b_3=57420$, $b_4=144115$, $b_5=304290$, $b_6=570969,\ldots$

MAPLE donne comme valeur approchée :

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 2\left[\frac{2}{5}+\frac{1}{135}+\frac{2}{1755}+\frac{1}{3094}+\frac{2}{16065}+\frac{1}{17325}+\ldots\right]=0.8182741852\ldots.$$

On peut en fait facilement expliciter directement ces entiers. En utilisant la relation entre deux termes successifs on obtient $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ avec $P_n=(2n+1)(4n+1)(8n+1)(8n+5)$.

Comme $a_0=5=P_0$, il vient $a_n=P_n$ puis $b_n=(n+1)(4n+3)(8n+5)(8n+9)$ La formule donnant l'intégrale double ci-dessus s'exprime alors par :

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{11+20n+16n^2}{(n+1)(2n+1)(4n+1)(4n+3)(8n+1)(8n+9)}.$$

Or $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 4\int_0^1\int_0^1\frac{ts}{t+s}\mathrm{d}t\mathrm{d}s=\frac{8}{3}(1-\ln(2))$.

Ceci nous donne une belle convergence de série vers $\ln(2)$.

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}(1-\ln(2)) &= \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{11+20n+16n^2}{(n+1)(2n+1)(4n+1)(4n+3)(8n+1)(8n+9)} \\ &= \frac{2}{5}+\frac{1}{135}+\frac{2}{1755}+\frac{1}{3094}+\frac{2}{16065}+\frac{1}{17325}+\frac{2}{65975}+\frac{1}{57420}+\frac{2}{186813}+\ldots\end{aligned}$$

¬ **Généralisation de l'application.**

On peut se demander naturellement s'il existe d'autres valeurs de l'exposant α conduisant à des formules similaires à convergence rapide. La réponse est positive.

On montre en effet facilement en reprenant les calculs précédents pour un exposant α quelconque, la formule : $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\frac{y^\alpha-x^\alpha}{y-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}q_n$,

les termes q_n étant explicités par : $q_n=\dfrac{(4n+3)\alpha}{(n+1)(2n+1)(\alpha+2n+1)(\alpha+2n+2)}\displaystyle\prod_{k=1}^{k=2n}\left(\frac{k-a}{k+a}\right)$ (avec $q_0=\dfrac{3\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$)

On a donc déjà dans tous les cas avec d'Alembert une convergence de série en $\dfrac{\alpha}{n^3}$.

Si on cherche maintenant des rationnels $\alpha=\dfrac{p}{q}$ de façon que les quotients q_n se simplifient par un procédé d'érosion diagonale, on est amené à choisir les entiers p et q tels que l'équation diophantienne $q\times k_2-p=q\times k_1+p$ admette des solutions non isolées et non triviales. On voit vite que le dénominateur

q doit alors prendre la valeur 2 et que $k_2 = k_1 + p$ L'entier p sera bien sûr pris impair.

On en déduit alors : $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=2n}\left(\frac{2k-p}{2k+p}\right) = \prod_{k=1}^{k=p}\frac{2k-p}{2k-p+4n}$, puis l'expression simplifiée de q_n :

$$q_n = \frac{2(4n+3)p}{(n+1)(2n+1)(4n+p+2)(4n+p+4)}\prod_{k=1}^{k=p}\frac{2k-p}{4n+2k-p}.$$

À une constante multiplicative prés la convergence est alors en $\dfrac{1}{n^{p+3}}$.

Par exemple pour $p = 3$ on obtient $q_n = \dfrac{-18}{(n+1)(2n+1)(4n-1)(4n+1)(4n+5)(4n+7)}$.

On trouve facilement par changements de variables élémentaires :

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{y^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{y-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{32}{15} - \frac{8\ln(2)}{5}.$$

D'où l'égalité : $\displaystyle\frac{6\ln(2)-8}{135} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)(4n-1)(4n+1)(4n+5)(4n+7)}$.

On peut plus généralement évaluer l'intégrale $G_p = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{y^{\frac{p}{2}} - x^{\frac{p}{2}}}{y-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ pour p impair quelconque.

Voici les grandes lignes du calcul.

- On écrit d'abord $G_p = 4\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{y^p - x^p}{y^2-x^2}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
- Pour p et q entiers considérons $\alpha(p,q) = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x^p y^q}{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. En passant en coordonnées polaires, on

obtient facilement : $\alpha(p,q) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^p(\theta)+\tan^q(\theta)}{\cos^2(\theta)(1+\tan(\theta))}d\theta = \int_0^1 \frac{t^p+t^q}{1+t}dt.$

- Par décomposition élémentaire de fraction on poursuit avec :

$\alpha(p,q) = \dfrac{1}{p+q+1}[((-1)^p + (-1)^q)\ln(2) + A(p) + A(q)]$ avec $A(n) = (-1)^{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

- Ecrivons alors $G_p = 4\displaystyle\sum_{k=0}^{k=p-1}\alpha(p-k,k+1) = \frac{4}{p+2}[-2\ln(2) + 2\sum_{k=1}^{k=p}A(k)]$.
- $2[A(1)+\ldots+A(p)] = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=p}[1-(-1)^k]\times\frac{1}{k} = 2\sum_{j=0}^{j=\frac{p-1}{2}}\frac{1}{2j+1}$.

Pour plus de commodité : $p \leftarrow 2p+1$ avec p entier quelconque $\geqslant 2$.

On peut alors écrire $G_{2p+1} = \dfrac{8}{2p+3}\left[-\ln(2) + \displaystyle\sum_{j=0}^{j=p}\frac{1}{2j+1}\right]$.

En décomposant cette intégrale en série comme on l'a étudié précédemment et après simplifications évidentes apparaît enfin la très belle formule B.B.P suivante : $\ln(2) - \displaystyle\sum_{j=0}^{j=p}\frac{1}{2j+1} = \lambda_p\sum\frac{1}{q(n,p)}$ avec

$\lambda_p = (-1)^{p+1}[1\times 3\times \ldots.\times(2p+1)]^2(2p+3)$.

$q(n,p) = 2(n+1)(2n+1)(4n-3)(4n+2p+1)(4n+2p+3)(4n+2p+5)(16n^2-1)Q(n,p)$.

$Q(n,p) = \displaystyle\prod_{j=2}^{j=p-1}[16n^2-(2j+1)^2]$.

Par exemple pour p=2 on obtient :

$$\frac{23}{15} - \ln(2) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1575}{2(n+1)(2n+1)(4n-3)(4n-1)(4n+1)(4n+5)(4n+7)(4n+9)}$$