Étude détaillée de l'opérateur T

Nous noterons ici $c_n = \int_0^1 x^n \rho(x)dx$ le moment d'ordre n relatif à la mesure ρ sur $[0,1]$ et par $d_n = \int_0^1 x^n \mu(x)\mathrm{d}x$ le moment de même ordre relatif à la mesure μ. On rappelle que la transformée de Stieltjes de μ peut se déduire de celle de ρ par une relation du type :

$$S_\mu(z) = a\left(z - \frac{c_1}{c_0} - \frac{c_0}{S_\rho(z)}\right)$$

Dans toute la suite, nous supposerons que le coefficient de normalisation a est égal à 1 et que le moment d'ordre 0 relatif à ρ est aussi égal à 1. On a vu dans ce cas que l'opérateur $\widetilde{T}$ a bien un caractère isométrique si on le fait agir sur l'hyperplan H des fonctions orthogonales à $P_0 = 1$, et qu'on peut en fait la prolonger en une application continue définie sur $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ en définissant $\widetilde{T} = \widetilde{T}\left(f - \int_0^1 f(t)\rho(t)\mathrm{d}t\right)$.

On obtient donc ici la forme simplifiée : $S_\mu(z) = z - c_1 - \dfrac{1}{S_\rho(z)}$.

Rappelons aussi les développements au voisinage de l'infini à l'aide des moments en question :

$S_\rho(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{c_n}{z^{n+1}}$; $S_\mu(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{d_n}{z^{n+1}}$.

En posant $Z = \dfrac{1}{z}$ on obtient au voisinage de zéro : $\sum_{n=0}^{n=\infty} d_n Z^{n+1} = \dfrac{1}{Z}\left(1 - \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n Z^n}\right) - c_1$.

Ainsi, si $\boxed{\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n Z^n} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \omega_n Z^n}$, on aura pour tout entier *n* : $\boxed{d_n = -\omega_{n+2}}$.

On notera les relations exprimant l'inversion de la série entière : $\omega_0 = \dfrac{1}{c_0} = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=0}^{k=n} \omega_k c_{n-k} = 0$.

Nous pouvons maintenant commencer à explorer les propriétés générales de l'opérateur $\widetilde{T}$ en adoptant vu sa définition par prolongements le plan naturel suivant :

¬ Analyse des propriétés de T défini sur les fonctions polynômes et plus généralement sur celles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ par : $f(x) \longmapsto g(x) = \int_0^1 \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}\rho(t)\mathrm{d}t$.

¬ Extension aux éléments de H par continuité.

¬ Extension à $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ par composition avec la projection orthogonale sur H.

Pour des raisons de clarté, nous utiliserons fréquemment les notations abusives $f(x)$ pour représenter la fonction f et $\widetilde{T}(f(x))$ pour simplifier $[\widetilde{T}(f)(x)]$. Enfin, pour différencier les différents produits scalaires ou normes intervenant nous mettrons en indice la mesure de référence.

A. Transformation des polynômes

Cette étude sera grandement facilitée par l'utilisation d'une première identité, élémentaire à démontrer, concernant la transformée du produit d'une fonction par l'identité.

Théorème 1 *Pour tout élément f de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$, la transformée de $x \longmapsto xf(x)$ par $\widetilde{T}$ est obtenue par la formule :* $\boxed{\widetilde{T}(xf(x)) = x\left[\widetilde{T}(f)\right](x) + \int_0^1 f(t)\rho(t)\mathrm{d}t}$.

¬ Commençons par le vérifier pour des fonctions polynômes.

$$\int_0^1 \frac{tf(t)-xf(x)}{t-x}\rho(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(t-x)f(t)+x(f(t)-f(x))}{t-x}\rho(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 f(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t + x\int_0^1 \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\rho(t)\,\mathrm{d}t$$

On remarquera que cette formule est encore valable si on considère f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$, telle que $\int_0^1 f(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et si on suppose que pour tout x de $]0,1[$ l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\rho(t)\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente.

¬ Considérons l'endomorphisme u de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ transformant $f(x)$ en $xf(x)$. Il est clair que u est continue pour la norme liée à cet espace car $\int_0^1 x^2 f^2(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f^2(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$.

De même l'endomorphisme v sur $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$ défini aussi par $f(x) \longmapsto xf(x)$ est continu.

Enfin la forme linéaire sur $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ par $f(x) \longmapsto \ell(f(x)) = \int_0^1 f(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t$ est continue puisque $|l(f(x))| = |< f(x) \mid 1 >_\rho| \leqslant \|f_\rho\| \times \|1\|_\rho$.

Comme les deux applications continues de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ vers $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$ définies par $f(x) \longmapsto \widetilde{T}(u(f(x))$ et $f(x) \longmapsto v(\widetilde{T}(f(x)) + \ell(f(x)) \times 1$ coïncident sur les fonctions polynômes, elles seront égales par densité sur $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ entier.

1. Transformées des puissances élémentaires

De la transformée évidente $T(x^0) = 0$ et de la formule fondamentale ci dessus on déduit facilement par récurrence que pour tout entier naturel n : $\boxed{T(x^n) = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_{n-1-k}x^k}$.

En effet si l'égalité est supposée vraie au rang n, on peut écrire aussitôt que :

$T(x^{n+1}) = T(x \times x^n) = xT(x^n) + \int_0^1 t^n\rho(t)dt = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_{n-1-k}x^{k+1} + c_n = \sum_{k=0}^{k=n} c_{n-k}x^k$.

L'hérédité est donc assurée, d'où la validité de la formule pour tout entier n .

2. Transformées réciproques des puissances entières

Étudions la transformée par T d'un polynôme de degré $n+1$, soit : $P(x) = \sum_{k=0}^{k=n+1} u_k x^k$.

Vu la linéarité de T et l'étude précédente,

$$T(P(x)) = \sum_{k=0}^{k=n+1} u_k T(x^k) = \sum_{k=0}^{k=n+1} u_k\left(\sum_{j=0}^{j=k-1} c_{k-1-j}x^j\right) = \sum_{j=0}^{j=n}\left(\sum_{k=j+1}^{k=n+1} u_k c_{k-1-j}\right)x^j$$

Si on veut réaliser $T(P(x)) = x^n$, on s'aperçoit qu'il faut choisir le système de $n+1$ coefficients $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ de façon que : $u_{n+1}c_0 = 1$ et que $\forall j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, $\sum_{k=j+1}^{k=n+1} u_k c_{k-1-j} = 0$.

Prenons donc $u_{n+1} = 1$ et écrivons les n autres équations sous la forme : $\sum_{q=0}^{q=n-j} u_{q+1+j}c_q = 0$.

Reprenons alors les formules d'inversion de la série des moments de ρ : $\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n Z^n} = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} \omega_n Z^n$.

On s'aperçoit qu'elles s'écrivent : pour $n \neq 0$: $\displaystyle\sum_{q=0}^{q=n} \omega_{n-q} c_q = 0$, ou encore, pour $n \neq j$: $\displaystyle\sum_{q=0}^{q=n-j} \omega_{n-j-q} c_q = 0$.

Il suffit donc d'ajuster les coefficients de P de façon que pour tout $j \in \{0,\, 1, \ldots, n-1\}$ et que pour tout q de $\{0, \ldots,\, n-j\}$: $u_{q+1+j} = \omega_{n-j-q}$.
Une réponse évidente est donnée par le choix des coefficients $u_k = \omega_{n+1-k}$.
Ceci est également conforme à la condition $u_{n+1} = 1$ car $\omega_0 = \dfrac{1}{c_0} = 1$.
On vient donc d'établir le résultat suivant :

Théorème 2 *Pour tout entier naturel n, le polynôme $G_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+1} \omega_{n+1-k} x^k$ est transformé par T en x^n.*

Remarque : Le choix de $u_0 = \omega_{n+1}$ était inutile car le terme constant de $P(x)$ n'intervient pas dans le calcul de la transformée par T et donc dans le système d'équations analysé. On a cependant tout intérêt à retenir cette valeur lorsque l'on analyse l'intégrale de G_n sur $[0,1]$ relative à la mesure ρ.
En effet : $\displaystyle\int_0^1 G_n(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{k=n+1} \omega_{n+1-k} \int_0^1 t^k \rho(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{k=n+1} \omega_{n+1-k} c_k = 0$, ceci toujours d'après les formules d'inversion.

Le polynôme G_n apparaît donc comme l'image réciproque par l'isométrie $\widetilde{T}$ du polynôme x^n.

3. Transformée de $1 + x + \cdots + x^n$

$$T(1 + x + ... + x^n) = \sum_{k=0}^{k=n} T(x^k) = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\sum_{j=0}^{j=k-1} c_{k-1-j} x^j \right) = \sum_{j=0}^{j=n-1} \left(\sum_{k=j+1}^{k=n} c_{k-1-j} \right) x^j.$$

Définissons le nombre harmonique d'ordre $n \geqslant 1$ relatif à la mesure ρ par : $H_n^\rho = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} c_k$.

Il est clair avec cette définition que : $\boxed{T(1 + x + ... + x^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} H_{n-k}^\rho x^k.}$

B. Émergence d'une deuxième isométrie

1. Définition d'une fonction dite réductrice de mesure

Nous sommes toujours dans le cadre de nos deux mesures positives $(\rho,\, \mu)$, dont les transformées de Stieltjes sont reliées par $S_\mu(z) = z - c_1 - \dfrac{1}{S_\rho(z)}$.

Nous supposerons dans toute la suite que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\mu(x)}$ est définie sur $[0,1]$ et que la mesure μ est bien bornée.

Définitions : On dira que la mesure ρ est **réductible** si la fonction $x \longmapsto \dfrac{\rho(x)}{\mu(x)}$ est élément de l'ensemble $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$.

On appellera alors **réductrice** de ρ l'antécédent pour $\widetilde{T}$ de $\dfrac{\rho}{\mu}$ que l'on notera φ.

Autrement dit, φ est un élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ satisfaisant à $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et tel que :

$$\boxed{\widetilde{T}(\varphi) = \frac{\rho}{\mu}.}$$

Nous allons voir que cette fonction est d'une importance capitale dans le cadre de l'étude de la transformation $\widetilde{T}$. Elle va nous permettre notamment sous certaines hypothèses, de déceler une deuxième isométrie en relation étroite avec $\widetilde{T}$ et conduire à des évaluations très élégantes d'intégrales sur $[0,1]$.
Effectuons cependant une remarque sur les notations: on a déjà introduit dans le chapitre précédent une fonction notée φ, permettant d'expliciter μ à partir de ρ. On verra par la suite qu'il s'agît bien du même objet, mais je respecte ici l'ordre naturel de ma progression dans cette étude. Je n'ai en effet su expliciter conjointement μ et φ qu'après tout un cheminement.

2. Forme linéaire attachée à la réductrice

S'il existe un élément φ de H telle que $\widetilde{T}$, on aura alors pour tout élément f de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$, vu la propriété fondamentale de $\widetilde{T}$:
$$< f \mid \varphi >_\rho - \int_0^1 f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 \varphi(x)\rho(x)dx =< \widetilde{T}(f) \mid \widetilde{T}(\varphi) >_\mu =< \widetilde{T}(f) \mid \frac{\rho}{\mu} >_\mu =< \widetilde{T}(f(t) \mid 1 >_\rho.$$
Or φ étant élément de H, $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

On obtient donc l'égalité : $\boxed{< f \mid \varphi >_\rho =< \widetilde{T}(f) \mid 1 >_\rho = \displaystyle\int_0^1 \widetilde{T}(f(t))\rho(t)\,\mathrm{d}t.}$

On voit donc apparaître naturellement une forme linéaire Φ définie sur $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ par : $f \longmapsto \Phi(f) = \displaystyle\int_0^1 \widetilde{T}(f(t))\rho(t)\,\mathrm{d}t$.
Cette forme linéaire est continue sur $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ car φ étant élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$, on a :
D'après Cauchy Schwartz : $\forall\ f \in \mathscr{L}^2([0,1],\rho),\ \ |\Phi(f)| = |< f \mid \varphi >_\rho| \leqslant \|\varphi\|_\rho \times \|f\|_\rho$.
Notons que lorsque f désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, l'action de cette forme sur f va se traduire par l'égalité : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)f(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1\int_0^1 \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\rho(x)\rho(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.}$
Nous supposerons dans toute la suite que la mesure ρ est effectivement réductible, et que l'on connaît sa réductrice φ.

3. Une composition remarquable

L'étude précédente montre que pour tout élément f de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$, on peut écrire par différence :

$$\int_0^1 \left[\varphi(t)f(t) - \widetilde{T}(f(t))\right]\rho(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Il est donc naturel de s'intéresser à l'opérateur S défini sur $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ par :

$$f \longmapsto h = S(f) = \varphi \times f - \widetilde{T}(f).$$

Nous allons montrer que sous certaines conditions de régularité, la transformée de h par $\widetilde{T}$ n'est autre que le produit de f par $\dfrac{\rho}{\mu}$.

Théorème 3 *Si l'élément f de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ est tel que $\varphi \times f$ et $\widetilde{T}(f)$ appartiennent à $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$, et que $\dfrac{\rho}{\mu} \times f$ soit élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$, alors on a la formule fondamentale :* $\widetilde{T}(h) = \widetilde{T}(\varphi \times f - \widetilde{T}(f)) = \dfrac{\rho}{\mu} \times f.$

Démonstration

Sous les hypothèses précédentes, la fonction h est élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$, et vérifie $\displaystyle\int_0^1 h(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
C'est donc un élément de H et par suite $\widetilde{T}\ (h)$ est élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$.
La différence $\widetilde{T}(h) - \dfrac{\rho}{\mu} \times f$ est donc aussi élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$. Pour montrer sa nullité, il nous suffit donc de montrer qu'elle est orthogonale à tout élément d'une base orthonormale de l'espace de Hilbert $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$.
Si on reprend la notation $n \longmapsto P_n$ pour désigner le système initial des polynômes orthogonaux relatifs à ρ, il nous suffit donc d'établir que pour tout entier n :

$$< \widetilde{T}(\varphi \times f - \widetilde{T}(f)) \mid \widetilde{T}(P_n) >_\mu = < \frac{\rho}{\mu} \times f \mid \widetilde{T}(P_n) >_\mu .$$

Le premier produit scalaire vaut par isométrie $\widetilde{T}$, et vu l'appartenance de h à H :
$< \varphi \times f - \widetilde{T}(f) \mid P_n >_\rho = < \varphi \mid f \times P_n >_\rho - < \widetilde{T}(f) \mid P_n >_\rho$.
Or : $< \varphi \mid f \times P_n >_\rho = < \dfrac{\rho}{\mu} \mid \widetilde{T}(f \times P_n) >_\mu = < \widetilde{T}(f \times P_n) \mid 1 >_\rho$.
Le deuxième produit scalaire se simplifie en $< f \times \widetilde{T}(P_n) \mid 1 >_\rho$. Il nous reste donc à vérifier :

$$\boxed{\int_0^1 \widetilde{T}[f(t)P_n(t)]\rho(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \widetilde{T}(f(t))P_n(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\widetilde{T}(P_n(t))\rho(t)\,\mathrm{d}t} \quad \text{(F)}$$

Nous allons d'abord l'établir lorsque f est une fonction polynôme. Cette formule de traduit alors simplement en : $\displaystyle\int_0^1 T[f(t)P_n(t)]\rho(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 T(f(t))P_n(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)T(P_n(t))\rho(t)\,\mathrm{d}t$.
¬ Commençons par le vérifier dans le cas particulier où $f(x) = x$.
Utilisons la formule du produit par t : $T(tP_n(t)) = tT(P_n(t)) + \displaystyle\int_0^1 P_n(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t$.
Il nous reste à multiplier par $\rho(t)$ et à intégrer sur $[0,1]$, ce qui nous donne bien l'égalité attendue car $\displaystyle\int_0^1 \rho(t)\,\mathrm{d}t = c_0 = 1$.
¬ Envisageons maintenant une puissance entière quelconque $f(x) = x^k$.
On vérifie facilement par récurrence sur k que pour tout polynôme P :
$T(x^kP(x)) = x^kT(P(x)) + \displaystyle\sum_{j=0}^{j=k-1} C(P,k,j)x^j$ avec $C(P,k,j) = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1-j}P(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t$.

Ceci généralise la formule établie plus haut : $T(x^k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{j=k-1} c_{k-1-j}x^j$.

On en déduit : $\displaystyle\int_0^1 T(t^kP_n(t))\rho(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^kT(P_n(t))\rho(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=0}^{j=k-1} C(P_n,k,j) \times c_j$.
Or vu la formule de transformation d'une puissance :

$$\begin{aligned}\int_0^1 T(t^k)P_n(t)\rho(t)dt = \sum_{j=0}^{j=k-1} c_{k-1-j}\int_0^1 t^jP_n(t)\rho(t)dt &= \sum_{j=0}^{j=k-1} c_{k-1-j} \times C(P_n,k,k-1-j)\\ &= \sum_{j=0}^{j=k-1} c_j \times C(P_n,k,j)\end{aligned}$$

On obtient donc encore l'égalité (F) pour toute fonction puissance entière et par suite, par linéarité de l'intégrale, pour toute fonction polynôme.
Enfin pour établir la validité de (*F*) pour un élément quelconque f satisfaisant aux conditions restrictives en question, il suffit de le considérer comme limite d'une suite de polynômes f_k , au sens de la norme sur

$\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$.
Comme la fonction $\dfrac{\rho}{\mu}$ est élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$, on va pouvoir passer sans problème à la limite pour les trois intégrales considérées.
Examinons par le détail ces trois opérations délicates.
¬ Pour le membre de gauche dans (F). Si on pose $g_k(t) = f(t) - f_k(t)$, on aura :
$I_k = \displaystyle\int_0^1 \widetilde{T}[f(t)P_n(t)]\rho(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \widetilde{T}[f_k(t)P_n(t)]\rho(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \widetilde{T}[g_k(t)P_n(t)]\rho(t)\,\mathrm{d}t$.
Par hypothèse, la différence g_k tend vers 0 dans l'espace $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$. Le polynôme P_n étant borné sur $[0,1]$, le produit $g_k \times P_n$ tend également vers 0 pour la même norme, et son image par l'application continue $\widetilde{T}$ tendra vers 0 pour la norme sur $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$.
Écrivons alors $I_k = \displaystyle\int_0^1 \widetilde{T}[g_k(t)P_n(t)]\frac{\rho(t)}{\mu(t)}\mu(t)\,\mathrm{d}t$; puisque $\dfrac{\rho}{\mu}$ est élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$, I_k apparaît comme un produit scalaire dans cet espace et peut donc être majoré en valeur absolue à l'aide de Cauchy-Schwartz. $|I_k| \leqslant \left\|\widetilde{T}(g_kP_n)\right\|_\mu \times \left\|\dfrac{\rho}{\mu}\right\|_\mu$. On en déduit $\lim\limits_{k\to\infty} I_k = 0$.
¬ Pour la première intégrale du membre de droite dans (F). Démarche analogue.
$J_k = \displaystyle\int_0^1 \widetilde{T}[f(t)]P_n(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \widetilde{T}[f_k(t)]P_n(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \widetilde{T}[g_k(t)]P_n(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t$
$|J_k| \leqslant \left\|\widetilde{T}(g_k)\right\|_\mu \times \left\|P_n \times \dfrac{\rho}{\mu}\right\|_\mu$. On conclut encore $\lim\limits_{k\to\infty} J_k = 0$.
¬ Enfin pour la dernière intégrale dans (F), la conclusion est plus simple :
$L_k = \displaystyle\int_0^1 f(t)\widetilde{T}(P_n(t))\rho(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f_k(t)\widetilde{T}(P_n(t))\rho(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g_k(t)\widetilde{T}(P_n(t))\rho(t)\,\mathrm{d}t$.
$|L_k| \leqslant \|g_k\|_\rho \times \left\|\widetilde{T}(P_n)\right\|_\rho$. En effet $\widetilde{T}(P_n) = Q_n$ est un polynôme donc élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$.
On a donc bien également $\lim\limits_{k\to\infty} L_k = 0$.
Le théorème est par suite clairement établi.
Si la fonction f de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ est telle que $\varphi \times f$ et $\widetilde{T}(f)$ sont aussi éléments de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ et telle que $\dfrac{\rho}{\mu} \times f$ soit élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$ on peut donc écrire :

$$\boxed{\widetilde{T}(\varphi \times f) = \widetilde{T}^2(f) + \frac{\rho}{\mu} \times f.}$$

4. Isométrie attachée à la réductrice

Ce résultat établi, remarquons la propriété d'isométrie vérifiée par l'opérateur S. Sous les hypothèses précédentes satisfaites par f , et si on pose encore $h = S(f) = \varphi \times f - \widetilde{T}(f)$, on a vérifié que $\widetilde{T}(h) = \dfrac{\rho}{\mu} \times f$.

Or h étant élément de H on en déduit par isométrie :
$< h \mid h >_\rho = < \widetilde{T}(h) \mid \widetilde{T}(h) >_\mu = < \dfrac{\rho}{\mu} \times f \mid \dfrac{\rho}{\mu} \times f >_\mu = < f \mid f >_{\frac{\rho^2}{\mu}}$.
On obtient donc l'identité $\boxed{\displaystyle\int_0^1 h^2(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f^2(t)\frac{\rho^2(t)\,\mathrm{d}t}{\mu(t)}.}$
Cette égalité peut se traduire plus simplement : $\boxed{\|S(f)\|_\rho = \|f\|_{\frac{\rho^2}{\mu}}.}$.
Cette formule est vraie en particulier pour toute fonction polynôme f si on suppose que la mesure de densité $\dfrac{\rho^2}{\mu}$ est elle même bornée, de même que ρ et μ.
L'opérateur S pourra donc comme on l'a fait pour T se prolonger d'après le théorème de Cauchy en une isométrie $\widetilde{S}$ de l'espace $\mathscr{L}^2([0,1],\dfrac{\rho^2}{\mu})$ vers l'espace H muni de la norme de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$. (Attention, ici $\widetilde{S}$

n'est pas à priori surjective car les images des polynômes ne sont plus comme pour T des polynômes d'une base orthonormale de l'espace d'arrivée).

On aura alors pour tout élément f de $\mathscr{L}^2([0{,}1],\frac{\rho^2}{\mu})$, $\boxed{\widetilde{T}\circ\widetilde{S}(f)=\frac{\rho}{\mu}\times f.}$

En effet si f est limite d'une suite de polynômes f_k au sens de la norme de $\mathscr{L}^2([0{,}1],\frac{\rho^2}{\mu})$, on en déduit que $\widetilde{S}(f_k)$ tend vers $\widetilde{S}(f)$ au sens de la norme de $\mathscr{L}^2([0{,}1],\rho)$ et que $\widetilde{T}(\widetilde{S}(f_k))$ tend vers $\widetilde{T}(\widetilde{S}(f))$ au sens de la norme sur $\mathscr{L}^2([0{,}1],\mu)$.

Or $\widetilde{T}(\widetilde{S}(f_k))=\frac{\rho}{\mu}\times f_k$, car f_k est un polynôme, et tend vers $\frac{\rho}{\mu}\times f$ dans $\mathscr{L}^2([0{,}1],\mu)$. Ceci simplement d'après : $\int_0^1[\frac{\rho}{\mu}(f-f_k)]^2\mu(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(f-f_k)^2\frac{\rho^2(x)}{\mu(x)}\,\mathrm{d}x$.

On a donc bien l'égalité annoncée.

Pour terminer nous allons vérifier que lorsque f est un élément de $\mathscr{L}^2([0{,}1],\frac{\rho^2}{\mu})$ satisfaisant aux trois conditions restrictives du théorème de composition précédent, alors $\widetilde{S}$ agît sur f comme : $\widetilde{S}(f)=S(f)=\varphi\times f-\widetilde{T}(f)$.

Ceci est clair vu que dans ce cas le théorème donne $\widetilde{T}(S(f))=\frac{\rho}{\mu}\times f$.

On aura donc : $\widetilde{T}(S(f))=\frac{\rho}{\mu}\times f=\widetilde{T}(\widetilde{S}(f))$. On conclut avec l'injectivité de $\widetilde{T}$ sur H.

5. Diagramme cohérent reliant T et S

Dans l'hypothèse précédente où la mesure $\frac{\rho^2}{\mu}$ est également bornée est apparue une deuxième isométrie $\widetilde{S}$ reliant l'espace $\mathscr{L}^2([0{,}1],\frac{\rho^2}{\mu})$ à l'espace H muni de la norme de $\mathscr{L}^2([0{,}1],\rho)$.

Notons alors $F_{(\rho,\mu)}$ l'application de $\mathscr{L}^2([0{,}1],\frac{\rho^2}{\mu})$ vers $\mathscr{L}^2([0{,}1],\mu)$ transformant f en $\frac{\rho}{\mu}\times f$.

Il s'agît de manière évidente d'une isométrie et sa réciproque n'est autre que l'application que nous noterons $F_{(\mu,\rho)}$ définie par : $f\longmapsto F_{(\mu,\rho)}(f)=\frac{\mu}{\rho}\times f$.

Celle ci est en effet bien définie car la relation essentielle $\mu(x)=\frac{\rho(x)}{\pi^+(x)}$ entre ρ et sa mesure secondaire montre que ρ ne s'annule pas sur $[0{,}1]$. On pouvait d'ailleurs partir de cette hypothèse sur ρ et en déduire la définition de $\frac{1}{\mu}$ sur l'intervalle en question.

On peut alors traduire la formule fondamentale de composition par un diagramme cohérent reliant $\widetilde{T}$ et $\widetilde{S}$:
$\boxed{\widetilde{T}\circ\widetilde{S}=F_{(\rho,\mu)}}$.

L'application $\widetilde{T}$ étant bijective, de même que $F_{(\rho,\mu)}$, on en déduit que $\widetilde{S}$ l'est également.

On peut alors écrire : $\boxed{\widetilde{S}^{-1}=F_{(\mu,\rho)}\circ\widetilde{T}}$ et $\boxed{\widetilde{T}^{-1}=\widetilde{S}\circ F_{(\mu,\rho)}}$.

On verra dans le chapitre 5 page 88 une interprétation en termes d'endomorphismes adjoints.

6. Antécédent pour T d'une série entière

Lorsque la mesure $\frac{\rho^2}{\mu}$ n'est pas bornée, la construction de l'isométrie $\widetilde{S}$ échoue.

Reste la formule de composition, pour les fonctions f satisfaisant aux trois hypothèses du théorème fondamental.

Il est cependant possible d'inverser $\widetilde{T}$ assez facilement, ne serait ce qu'en utilisant les bases orthonormales. On

a en effet pour tout f de H : $\widetilde{T}(f) = \widetilde{T}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n Q_n$ avec $\alpha_n =< f \mid P_n >_\rho =< \widetilde{T}(f) \mid Q_n >_\mu$.
L'antécédent pour $\widetilde{T}$ d'un élément g de $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$ est donc simplement défini par :

$$f = \widetilde{T}^{-1}(g) = \sum_{n=1}^{\infty} < g \mid Q_n >_\mu P_n$$

En particulier, la réductrice lorsqu'elle existe n'est autre que : $\varphi = \sum_{n=1}^{n=\infty} < Q_n \mid 1 >_\rho P_n$.
Il est possible de procéder autrement grâce à la théorie des variables complexes, dans le cas où la fonction g dont on cherche un antécédent est suffisamment régulière.
Par exemple si la fonction g de $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$ est en fait une série entière de rayon de convergence infini.
Commençons par étudier le cas particulier où g est une fonction polynôme.
Ecrivons la $g(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} v_k x^k$ avec bien sûr les coefficients v_k nuls à partir d'un certain rang.
On sait alors vu l'étude de l'action de T sur les polynômes, que g a pour antécédent le polynôme f défini par $f(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} v_k \left(\sum_{j=0}^{j=k+1} \omega_{k+1-j} x^j\right) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \left(\sum_{k=j-1}^{k=\infty} v_k \omega_{k+1-j}\right) x^j = \sum_{j=0}^{j=\infty} u_j x^j$
Or d'après la formule intégrale de Cauchy : $v_k = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{g(z)dz}{z^{k+1}}$, γ désignant un cercle centré sur l'origine, de rayon $r \geqslant 1$, parcouru dans le sens direct.
On peut alors écrire, avec les notations précédentes :

$$u_j = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sum_{k=j-1}^{k=\infty} \omega_{k+1-j}}{z^{k+1}} g(z)dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\omega_q}{z^{q+j}} g(z)dz.$$

Or on se souvient dans les préliminaires sur les transformées de Stieltjes de ρ et μ de la relation :
$\sum_{n=0}^{n=\infty} \omega_n z^n = 1 - c_1 z - z S_\mu(\frac{1}{z}) = h(z)$ pour $|z|$ assez grand.

Si on choisit le rayon r suffisamment grand on pourra donc écrire : $u_j = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{h\left(\frac{1}{z}\right)}{z^j} g(z)dz$.

Ainsi : $f(x) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=0}^{j=\infty} \int_\gamma \frac{h(\frac{1}{z}) g(z) x^j dz}{z^j}$.

Pour tout x de $[0,1]$: $\sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{x^j}{z^j} = \frac{1}{1 - \frac{x}{z}}$, avec convergence uniforme en z sur le chemin γ.
On en déduit

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{h(\frac{1}{z}) g(z)dz}{1 - \frac{x}{z}} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{(1 - \frac{c_1}{z} - \frac{1}{z} S_\mu(z)) g(z)dz}{1 - \frac{x}{z}} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{(z - c_1 - S_\mu(z)) g(z)dz}{z - x}.$$

Or on sait que $S_\mu(z) = z - c_1 - \frac{1}{S_\rho(z)}$. On obtient donc dans le cas d'un polynôme g, l'expression de l'antécédent f pour $\widetilde{T}$: $\boxed{f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{g(z)dz}{S_\rho(z)(z - x)}.}$
Il reste à étendre cette formule au cas d'une série entière quelconque de rayon infini.
On peut par exemple vérifier directement que $T(f) = g$ puisque f est de manière évidente de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

$$\int_0^1 \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\rho(t)dt = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 (\int_\gamma \frac{g(z)dz}{S_\rho(z)(z-t)(z-x)})\rho(t)dt = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left(\int_0^1 \frac{\rho(t)dt}{z-t}\right)\frac{g(z)dz}{S_\rho(z)(z-x)}.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\rho(t)dt}{z-t} = S_\rho(z)$, par définition même.

On obtient donc bien $T(f)= \displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{g(z)dz}{z-x} = g(x)$, d'après la formule intégrale de Cauchy.

C. Explicitation de la réductrice

On va montrer dans ce paragraphe que lorsque la réductrice existe, elle est en fait définie comme la fonction introduite dans le chapitre 2 que nous noterons ici
$\psi(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2\displaystyle\int_0^1 \frac{(x-t)\rho(t)dt}{(x-t)^2+\epsilon^2}$, sous réserve de l'appartenance de ψ à $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$.
Ceci va se faire naturellement par l'intermédiaire des moments. On va établir que pour tout entier *n* :
$< \varphi(x) \mid x^n >_\rho = < \psi \mid x^n >_\rho$, ce qui justifiera l'égalité dans l'espace en question.

1. Moments de la réductrice

Pour tout entier n :
$$\sigma_n = \int_0^1 \varphi(t)t^n\rho(t)dt = < \varphi \mid x^n >_\rho = < \widetilde{T}(\varphi) \mid \widetilde{T}(x^n) >_\mu = < \frac{\rho}{\mu} \mid T(x^n) >_\mu = < \rho \mid T(x^n) >_1.$$

Or $T(x^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} c_{n-1-k}x^k$. On en déduit $\boxed{\sigma_n = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)t^n\rho(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_k c_{n-1-k}.}$

Ces coefficients apparaissent dans le développement en série du carré de la transformée de Stieltjes de la mesure ρ.

En effet on sait que pour $|z|$ assez grand : $S_\rho(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}$.

On en déduit par le théorème du produit de deux séries : $(S_\rho(z))^2 = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=\infty}\sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{c_i c_j}{z^{i+j+2}}$, soit après regroupement : $(S_\rho(z))^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sigma_n}{z^{n+1}}$

2. Coïncidence des moments

$$\sigma_n = \int_0^1 \varphi(t)t^n\rho(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_k c_{n-1-k}.$$

Posons $\psi(x) = \displaystyle\lim_{\epsilon\to 0^+} 2\int_0^1 \frac{(x-t)\rho(t)\,\mathrm{d}t}{(x-t)^2+\epsilon^2}$, supposée de carré intégrable pour ρ, et examinons ses moments pour cette mesure.

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\sigma'_n = \displaystyle\int_0^1 \psi(x)x^n\rho(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^1 \frac{(x-t)x^n\rho(t)\,\mathrm{d}t}{(x-t)^2+\epsilon^2}\rho(x)\,\mathrm{d}x.$

Posons pour ϵ positif fixé : $\sigma'_n(\epsilon) = 2\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{(x-t)x^n\rho(t)\,\mathrm{d}t}{(x-t)^2+\epsilon^2}\rho(x)\,\mathrm{d}x.$

En changeant le couple (x,t) en (t,x) et par raison de symétrie on obtient :

$$\sigma'_n(\epsilon) = \int_0^1\int_0^1 \frac{(x-t)(x^n-t^n)\rho(t)\rho(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x}{(x-t)^2+\epsilon^2}\rho(x)\,\mathrm{d}x.$$

Les fonctions intervenant sont maintenant positives, Fubini nous permet d'écrire : $\sigma'_n = \displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\sigma'(n,\epsilon)$.

Utilisons maintenant $x^n - t^n = (x-t)\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} t^k x^{n-1-k}$.

En écrivant sous forme intégrale $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} c_k c_{n-1-k} = \sum_{k=0}^{k=n-1} \int_0^1 t^k \rho(t)\,\mathrm{d}t \int_0^1 x^{n-1-k}\rho(x)\,\mathrm{d}x$.

Il vient donc naturellement : $\sigma_n = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n - t^n}{x-t}\rho(t)\rho(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sigma_n - \sigma'_n &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{(x-t)^2} - \frac{1}{(x-t)^2+\epsilon^2}\right)(x-t)(x^n-t^n)\rho(t)\rho(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon^2\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{(x-t)^2((x-t)^2+\epsilon^2)}\right)(x-t)(x^n-t^n)\rho(t)\rho(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon^2\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{x^n-t^n}{(x-t)((x-t)^2+\epsilon^2)}\right)\rho(t)\rho(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or cette limite est nulle. On peut par exemple remarquer que la fonction continue $(x,t)\longmapsto \dfrac{x^n-t^n}{x-t}$ est bornée sur le compact $[0,1]\times[0,1]$. En majorant la valeur absolue de la différence on se ramène à des intégrales de fonctions positives pour lesquelles Fubini permet les échanges de limites. On conclut alors grâce au résultat obtenu dans le second chapitre : $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon\int_0^1 \frac{\rho(t)dt}{(x-t)^2+\epsilon^2} = \pi\rho(x)$.

On verra plus loin une démonstration simplifiée. (voir 4).

3. Importance du cas particulier de la mesure de Lebesgue

On distinguera ici l'opérateur $\widetilde{T}_1$ correspondant au cas particulier $\rho = 1$ de l'opérateur $\widetilde{T}_\rho$ associé à une mesure positive quelconque ρ, (noté simplement $\widetilde{T}$ dans les chapitres précédents). Commençons par remarquer que ces deux opérateurs sont reliés par une formule générale élémentaire :

$$\boxed{\widetilde{T}_\rho(f(x)) = \widetilde{T}_1(\rho(x)f(x)) - f(x)\widetilde{T}_1(\rho(x)).} \quad (1)$$

Cela vient simplement de : $\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}\rho(t) = \dfrac{f(t)\rho(t)-f(x)\rho(x)}{t-x} - f(x)\dfrac{\rho(t)-\rho(x)}{t-x}$.

Rappelons alors que la réductrice φ de ρ est définie par la formule (chapitre 2) :

$\varphi(x) = 2\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)\rho(x) - 2\displaystyle\int_0^1 \frac{\rho(t)-\rho(x)}{t-x}\mathrm{d}t$.

On reconnaît là aussi le cas particulier de Lebesgue avec la réductrice $a(x) = 2\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

La relation fondamentale de définition $\widetilde{T}(\varphi) = \dfrac{\rho}{\mu} = \dfrac{\varphi^2}{4} + \pi^2\rho^2$ peut grâce aux remarques précédentes se ramener à une équation universelle impliquant $\widetilde{T}_1$ et la mesure ρ.

$$\boxed{[\widetilde{T}_1(\rho)]^2 - 2\widetilde{T}_1(\rho\widetilde{T}_1(\rho)) + \widetilde{T}_1^2(\rho^2) = 0.}$$

Pour la démonstration notons $b = \widetilde{T}_1(\rho)$, ce qui donne $\varphi = a\rho - 2b$.

D'après (1) : $\widetilde{T}_\rho(\varphi) = \widetilde{T}_1(\rho\varphi) - \varphi b = \widetilde{T}_1(a\rho^2) - 2\widetilde{T}_1(b\rho) - a\rho b + 2b^2$.

Or $\dfrac{\rho}{\mu} = \dfrac{\varphi^2}{4} + \pi^2\rho^2 = \dfrac{a^2\rho^2}{4} - a\rho b + b^2 + \pi^2\rho^2$.

Ainsi $\widetilde{T}_\rho(\varphi) = \dfrac{\rho}{\mu} \iff \widetilde{T}_1(a\rho^2) - 2\widetilde{T}_1(b\rho) = \left(\dfrac{a^2}{4} + \pi^2\right)\rho^2 - b^2$.

Il reste à utiliser la formule de composition dans le cas particulier de Lebesgue :

$\widetilde{T}_1(a\rho^2) = \widetilde{T}_1^2(\rho^2) + \left(\dfrac{a^2}{4} + \pi^2\right)\rho^2$ pour obtenir l'équivalence :

$$\widetilde{T}_\rho(\varphi) = \frac{\rho}{\mu} \iff \widetilde{T}_1^2(\rho^2) - 2\widetilde{T}_1(b\rho) = -b^2 \iff [\widetilde{T}_1(\rho)]^2 - 2\widetilde{T}_1(\rho\widetilde{T}_1(\rho)) + \widetilde{T}_1^2(\rho^2) = 0.$$

4. Commutation des opérateurs

Nous gardons ici les notations du paragraphe précédent.
Rappelons la relation de composition entre $\widetilde{T}_\rho$ et $\widetilde{S}_\rho$, soit : $\boxed{\widetilde{T}_\rho(\varphi f - \widetilde{T}_\rho(f)) = \frac{\rho}{\mu} f}$ (2).
Nous allons montrer que cette égalité se traduit simplement comme une commutation entre les opérateurs $\widetilde{T}_\rho$ et $\widetilde{T}_1$, plus précisément :

$$\boxed{\widetilde{T}_\rho(\varphi f - \widetilde{T}_\rho(f)) = \frac{\rho}{\mu} f \iff \widetilde{T}_1(\widetilde{T}_\rho(\rho f)) = \widetilde{T}_\rho(\widetilde{T}_1(\rho f)).}$$

Commençons par écrire : $\varphi f = a\rho f - 2bf$. On en déduit :
$\widetilde{T}_\rho(\varphi f - \widetilde{T}_\rho(f)) = \widetilde{T}_\rho(a\rho f) - 2\widetilde{T}_\rho(bf) - \widetilde{T}\rho^2(f)$.
Or de la relation (1) du paragraphe précédent on tire $\widetilde{T}_\rho(a\rho f) = \widetilde{T}_1(a\rho^2 f) - ab\rho f$ ainsi que $\widetilde{T}_\rho(bf) = \widetilde{T}_1(b\rho f) - b^2 f$.
La même relation permet de transformer en deux étapes $\widetilde{T}_\rho^2(f)$. On obtient après réductions :
$\widetilde{T}_\rho^2(f) = \widetilde{T}_1(\rho\widetilde{T}_1(\rho f)) - \widetilde{T}_1(\rho b f) - b\widetilde{T}_1(\rho f) + b^2 f$.
Le premier membre de (2) se résume alors à : $\widetilde{T}_1(a\rho^2 f) - ab\rho f - \widetilde{T}_1(\rho b f) + b^2 f - \widetilde{T}_1(\rho\widetilde{T}_1(\rho f)) + b\widetilde{T}_1(\rho f)$.
Or dans le cas particulier de la mesure de Lebesgue, la relation (2) permet d'écrire :
$\widetilde{T}_1(a\rho^2 f) = \widetilde{T}_1^2(\rho^2 f) + \left(\frac{a^2}{4} + \pi^2\right)\rho^2 f$, (sous réserve des 3 conditions d'application).
Mettons alors le second membre de (2) sous la forme : $\frac{\rho}{\mu} f = \left(\frac{\varphi^2}{4} + \pi^2\rho^2\right) f = \left(\frac{a^2}{4}\rho^2 + b^2 - ab\rho + \pi^2\rho^2\right) f$.

La comparaison des deux membres de l'égalité donne après simplifications l'égalité :

$$\boxed{\widetilde{T}_1^2(\rho^2 f) - \widetilde{T}_1(\rho b f) - \widetilde{T}_1(\rho\widetilde{T}_1(\rho f)) + \widetilde{T}_1(\rho)\widetilde{T}_1(\rho f) = 0.} \quad (3)$$

Or d'après (1) : $\widetilde{T}_1(\rho^2 f) - \rho b f = \widetilde{T}_\rho(\rho f)$ et $\widetilde{T}_1(\rho\widetilde{T}_1(\rho f)) - b\widetilde{T}_1(\rho f) = \widetilde{T}_\rho(\widetilde{T}_1(\rho f))$.
La relation (3) se traduit alors simplement : $\boxed{\widetilde{T}_1(\widetilde{T}_\rho(\rho f)) = \widetilde{T}_\rho(\widetilde{T}_1(\rho f)).}$
Ici encore apparaît donc l'importance du cas particulier de la mesure de Lebesgue.
En effet la commutation des opérateurs sur les fonctions puissances élémentaires et donc sur les polynômes s'effectue en fait directement de manière élémentaire. La relation de composition dans le cas de Lebesgue induit alors celle pour une mesure quelconque.
Pour renforcer le lien entre les mesures notons la relation entre les isométries $\widetilde{S}_\rho$ et $\widetilde{S}_1$ que l'on peut vérifier facilement : $\boxed{\left(\widetilde{S}_\rho - \widetilde{T}_\rho\right)(f) = \left(\widetilde{S}_1 - \widetilde{T}_1\right)(\rho f).}$

5. Une autre calcul des moments de la réductrice

J'ai trouvé cette démonstration sur le tard, lorsque s'est bien précisée l'importance du cas particulier de la mesure de Lebesgue. On utilise ici le fait que la réductrice de cette mesure de Lebesgue est la fonction $x \longmapsto 2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$. Comme on le verra dans le chapitre suivant ce résultat s'établit par un calcul de moments également mais on peut l'obtenir directement par des transformations sur une intégrale double. (On n'utilise donc pas un cas particulier du théorème pour prouver le théorème !). Voici dans ce qui suit la généralisation à une mesure quelconque.
Nous allons montrer ici que lorsqu'elle est élément de $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$, la fonction φ définie par $x \longmapsto \varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\rho(x) - 2\int_0^1 \frac{\rho(t)-\rho(x)}{t-x}dt = 2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - 2\widetilde{T}_1(\rho(x))$ est bien l'antécédent pour $\widetilde{T}$ du quotient $\frac{\rho}{\mu}$, et ceci en vérifiant que pour tout entier *n*, son moment α_n d'ordre n pour ρ coïncide avec celui

de la réductrice, soit : $\alpha_n = \sigma_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_k c_{n-1-k}$.

Par définitions : $\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n \rho^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) x^n \rho^2(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 2\widetilde{T}_1(\rho(x)) x^n \rho(x)\,\mathrm{d}x$.

Or vu l'étude sur la réductrice de Lebesgue : $\int_0^1 2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) x^n \rho^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \widetilde{T}_1(x^n \rho^2(x))\,\mathrm{d}x$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\alpha_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{t^n \rho^2(t) - x^n \rho^2(x)}{t-x}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(t)-\rho(x)}{t-x} x^n \rho(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(\rho(t)-\rho(x))^2 + (t^n - x^n)\rho^2(t)}{t-x}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ecrivons $(t^n - x^n)\rho^2(t) = (t^n - x^n)\rho(t)\rho(x) + (t^n - x^n)\rho(t)(\rho(t)-\rho(x))$.

Il vient alors : $\alpha_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(t^n - x^n)\rho(t)\rho(x)}{t-x}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(t)-\rho(x)}{t-x}(t^n \rho(t) - x^n \rho(x))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$.

La première intégrale se décompose facilement en :

$\int_0^1 \int_0^1 (\sum_{k=0}^{k=n-1} t^k x^{n-1-k})\rho(t)\rho(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{k=n-1} (\int_0^1 t^k \rho(t)\,\mathrm{d}t) \times (\int_0^1 x^{n-1-k}\rho(x)\,\mathrm{d}x) = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_k c_{n-1-k}$.

La deuxième intégrale est manifestement nulle par symétrie élémentaire $(t,x) \leftrightarrow (x,t)$.

On a donc bien établi ainsi la coïncidence des moments.

D. Exemple d'une mesure non réductible

Considérons la mesure de Tchebychev sur $]-1,1[$ de densité $\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$.

Ses moments sont donnés par la formule $c_{2n} = \frac{C_{2n}^n}{4^n}$, ceux d'indice impair étant nuls.

Sa transformée de Stieltjes $S_\rho(z) = \frac{i}{\sqrt{1-z^2}}$ conduit à la mesure secondaire $\mu(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}$.

Les moments de celle-ci s'explicitent facilement comme : $d_{2n} = \frac{C_{2n}^n}{2(4^n)(n+1)}$.

Si l'isométrie T_ρ est encore active ici, on ne peut plus par contre définir la réductrice φ.

En effet le quotient $\frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{1-x^2}$ n'est pas élément de $\mathscr{L}^2(]-1\,;\,1[,\mu)$.

Voici donc un exemple simple de mesure « non réductible » au sens que nous avons développé dans les chapitres précédents.

Le programme MAPLE suivant donne les premiers polynômes primaires et secondaires et teste l'orthogonalité de ces derniers. (Pour une normalisation il suffit de tout multiplier par le coefficient $\sqrt{2}$).

Je me suis amusé à étudier les carrés des normes des polynômes secondaires pour la mesure initiale. Dans le cas de la mesure de Lebesgue cette recherche faisait apparaître la suite naturelle des nombres premiers dans les dénominateurs. (Voir fichier « petite histoire » sur le site actuel). Ici apparaît également une propriété arithmétique étonnante, il semble que c'est la suite naturelle des entiers qui est en formation. Je n'ai pas de justifications de ces phénomènes observés. Pour les polynômes de Laguerre, la même étude des carrés de norme donne des fractions où apparaît encore la suite naturelle des nombres premiers au dénominateur, alors que les numérateurs ont des « grands » facteurs premiers.

```
> ro:=x->1/(Pi*sqrt(1-x*x));
```

$$ro := x \to \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

```
> Tra:=proc(f)
local t,g,x;
g:=int((f(t)-f(x))*ro(t)/(t-x),t=-1..1);g:=unapply(g,x);end;
```

$$Tra := \mathbf{proc}(f)\ \mathbf{local}\ t, g, x;\ g := int((f(t) - f(x)) * ro(t)/(t-x), t = -1..1);\ g := unapply(g, x)\ \mathbf{end\ proc}$$

```
> for n from 0 to 10 do T[n]:=unapply(simplify(expand(cos(n*arccos(x)))),x);od;
```

$$T_0 := 1$$

$$T_1 := x \to x$$

$$T_2 := x \to 2x^2 - 1$$

$$T_3 := x \to 4x^3 - 3x$$

$$T_4 := x \to 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5 := x \to 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6 := x \to 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7 := x \to 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$T_8 := x \to 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$T_9 := x \to 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

$$T_{10} := x \to 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$$

```
> for n from 1 to 10 do Q[n]:=Tra(T[n]);od;
```

$$Q_1 := 1$$

$$Q_2 := x \to 2x$$

$$Q_3 := x \to -1 + 4x^2$$

$$Q_4 := x \to -4x + 8x^3$$

$$Q_5 := x \to 1 + 16x^4 - 12x^2$$

$$Q_6 := x \to 6x - 32x^3 + 32x^5$$

$$Q_7 := x \to -1 + 24x^2 - 80x^4 + 64x^6$$

$$Q_8 := x \to 128x^7 + 80x^3 - 8x - 192x^5$$

$$Q_9 := x \to 240x^4 - 448x^6 + 1 - 40x^2 + 256x^8$$

$$Q_{10} := x \to 10x - 160x^3 + 672x^5 - 1024x^7 + 512x^9$$

```
> mu:=x->sqrt(1-x*x)/Pi;
```

$$\mu := x \to \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

```
> scal:=proc(f,g)
local t,s;
s:=int(f(t)*g(t)*mu(t),t=-1..1);end;
```

$$scal := \mathbf{proc}(f, g)\ \mathbf{local}\ t, s;\ s := int(f(t) * g(t) * \mathrm{mu}(t), t = -1..1)\ \mathbf{end\ proc}$$

```
> scal(Q[1],Q[1]);
```

$$\frac{1}{2}$$

```
> scal(Q[3],Q[7]);
```

$$0$$

```
> scal(Q[4],Q[6]);
```