A. Une mesure rendant orthogonaux des polynômes secondaires.

Position du problème

On considère dans toute la suite une mesure positive bornée sur $[0,1]$, de densité $x \longmapsto \rho(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, et l'espace de Hilbert $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ associé, muni du produit scalaire classique : $(f,g) \longmapsto < f \mid g >_\rho = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t$.

¬ On sait alors qu'il est possible de construire par le procédé de Schmidt une famille de polynômes orthogonaux pour ce produit scalaire, que l'on notera ici $n \longmapsto P_n$.

Ces polynômes P_n de degré n sont définis à un coefficient multiplicatif près, et satisfont à une relation de récurrence d'ordre 2 du type :

$$\boxed{\forall \geqslant 1, \quad XP_n(X) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}P_{n+1}(X) + \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} - \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right)P_n(X) + \frac{\alpha_{n-1}\left\|P_n\right\|^2}{\alpha_n\left\|P_{n-1}\right\|^2}P_{n-1}(X).}$$

(lorsque l'on pose $P_n(X) = \alpha_n X^n + \beta_n X^{n-1} + \ldots$)

On définit alors une famille associée de polynômes dits secondaires, par : $Q_n(X) = \displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(t) - P_n(X)}{t - X}\rho(t)\,\mathrm{d}t$, polynôme en X de degré $n-1$.

Ceux-ci ne sont plus orthogonaux pour le produit scalaire considéré, mais sont générés de manière évidente par la même relation de récurrence que les P_n.

¬ Supposons qu'il existe une autre mesure positive bornée sur $[0,1]$, que nous noterons μ, rendant orthogonaux les Q_n. On dira par définition qu'une telle mesure est **secondaire** relativement à ρ. La relation de récurrence sur les Q_n pourra alors s'écrire :

$$\boxed{XQ_n(X) = \frac{\alpha'_n}{\alpha'_{n+1}}Q_{n+1}(X) + \left(\frac{\beta'_n}{\alpha'_n} - \frac{\beta'_{n+1}}{\alpha'_{n+1}}\right)Q_n(X) + \frac{\alpha'_{n-1}(N(Q_n))^2}{\alpha'_n(N(Q_{n-1}))^2}Q_{n-1}(X)}$$

Avec les notations : $Q_n(X) = \alpha'_n X^{n-1} + \beta'_{n-1}X^{n-2} + \ldots$, N désignant la norme pour le produit scalaire défini par μ. Cette égalité fonctionne cependant ici à partir de $n = 2$, car le polynôme Q_0 est identiquement nul.

Le système $(Q_{n-1}\,, Q_n\,, Q_{n+1})$ étant libre, la comparaison des deux modes de génération donne immédiatement les égalités : pour $n \geqslant 2$ $\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \dfrac{\alpha'_n}{\alpha'_{n+1}}$ et $\dfrac{\alpha_{n-1}\left\|P_n\right\|^2}{\alpha_n\left\|P_{n-1}\right\|^2} = \dfrac{\alpha'_{n-1}(N(Q_n))^2}{\alpha'_n(N(Q_{n-1}))^2}$.

Or le calcul direct de Q_1 et Q_2 donne aussi $\dfrac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

En effet de $P_1(X) = \alpha_1 X + \beta_1$ et $P_2(X) = \alpha_2 X^2 + \beta_2 X + \gamma_2$ on tire facilement :

$Q_1(X) = \alpha_1 c_0$ et $Q_2(X) = \alpha_2(c_0 X + c_1) + \beta_2 c_0$ avec $c_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \rho(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi on a bien $\dfrac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = \dfrac{\alpha_1 c_0}{\alpha_2 c_0} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

On en déduit aussitôt la proportionnalité : $\forall n \geqslant 2$ $\dfrac{N(Q_n)}{N(Q_{n-1})} = \dfrac{\|P_n\|}{\|P_{n-1}\|}$.

Ainsi, si au départ $N(Q_1) = \|P_1\|$, on aura la coïncidence des normes pour tout rang $n \geqslant 1$.

$\forall n \geqslant 1 \quad N(Q_n) = \|P_n\|$.

On va donc s'intéresser naturellement dans ce cas à l'application qui transforme P_n en Q_n.

On va voir qu'il est possible de la prolonger en une isométrie agissant sur un espace plus grand.

¬ Étude de la transformation T : $f(x) \longmapsto g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t) - f(x)}{t - x}\rho(t)\,\mathrm{d}t$.

D'après le caractère positif borné de ρ, l'espace $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ est un espace de Hilbert et a pour base orthonormale le système $n \longmapsto L_n = \dfrac{P_n}{\|P_n\|}$.

Si on considère dans cet espace l'hyperplan H des vecteurs orthogonaux à P_0, c'est à dire des fonctions de

carré intégrable telles que $\int_0^1 f(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t = 0$, il est clair que l'on a affaire à un fermé dans un espace de Hilbert, donc un espace de Hilbert pour lequel une base orthonormale est constituée par la suite $n \longmapsto L_n$; $n \geqslant 1$.
Or, d'après le paragraphe précédent, l'application T apparaît comme une isométrie si on la fait agir au départ sur le sous espace engendré par cette base algébrique, l'espace d'arrivée étant l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N.
D'après le théorème de Cauchy, et vu le caractère positif borné de la mesure μ, cette isométrie se prolonge naturellement en une isométrie $\widetilde{T}$, reliant l'espace de Hilbert (H,ρ) à l'espace de Hilbert $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$.
Ceci est résumé par la formule :

$$\boxed{\forall\ (f,g) \in H \times H\ :\ \int_0^1 f(t)g(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \widetilde{T}(f)(t)\widetilde{T}(g)(t)\mu(t)\,\mathrm{d}t}$$

Pour faciliter l'écriture, on notera simplement par la suite : $[\widetilde{T}(f)](t) = \widetilde{T}(f(t))$.
Si on se restreint aux éléments f de H de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, on peut expliciter l'image g de f par $\widetilde{T}$, qui n'est autre que la fonction $x \longmapsto g(x) = \int_0^1 \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\rho(t)\,\mathrm{d}t$.
En effet, en utilisant le théorème de Stone -Weierstrass et en commençant par approcher uniformément la dérivée de f sur $[0,1]$ on construit facilement une suite $n \longmapsto f_n$ de polynômes d'intégrale nulle sur $[0,1]$ convergent uniformément vers f, et dont la suite des dérivées converge uniformément vers f'. Si on pose $T(f_n) = g_n$, il vient $g(x) - g_n(x) = \int_0^1 \frac{h_n(t)-h_n(x)}{t-x}\rho(t)\,\mathrm{d}t$ avec $h_n(t) = f(t) - f_n(t)$.
Comme la suite des dérivées de h_n converge vers 0 uniformément sur $[0,1]$, il est clair que g_n converge uniformément vers g sur cet intervalle, donc également au sens de la norme sur l'espace de Hilbert $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$. Ceci assure $\widetilde{T}(f) = g$. On a donc le premier résultat :
Théorème :
S'il existe une mesure μ positive bornée sur $[0,1]$ rendant orthogonaux les polynômes secondaires Q_n dérivant des polynômes orthogonaux P_n pour une mesure positive bornée ρ sur ce même intervalle, et si on a l'égalité de la norme de Q_1 pour μ avec la norme de P_1 pour ρ, alors la correspondance $\widetilde{T}$ définie ci dessus est une isométrie.
Remarquons que H étant un hyperplan fermé, il est possible de prolonger $\widetilde{T}$ en une application linéaire continue sur l'espace entier $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$ en composant avec la projection orthogonale sur H. Pour ne pas alourdir les notations on s'autorisera la notation abusive $\widetilde{T}(f) = \widetilde{T}\left(f - \frac{1}{c_0}\int_0^1 f(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t\right)$, en se rappelant que $\widetilde{T}$ n'est une isométrie que si elle agît sur H et en posant encore ici $c_0 = \int_0^1 \rho(t)\,\mathrm{d}t$.
Grâce à cette convention on pourra écrire que pour tout couple (f,g) d'éléments de l'espace entier $\mathscr{L}^2([0,1],\rho)$, on a la relation de covariance, dans le cas où $c_0 = \int_0^1 \rho(t)\,\mathrm{d}t = 1$:

$$\boxed{< f(t) \mid g(t) >_\rho - \int_0^1 f(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 g(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t =< \widetilde{T}(f(t) \mid \widetilde{T}(g(t)) >_\mu}$$

2. Condition suffisante d'existence d'une mesure secondaire

Ici vont intervenir des résultats plus puissants sur les transformées de Stieltjes des mesures considérées, et leurs approximants de Padé.
On rappelle les définitions et les résultats classiques de la théorie :
La transformée de Stieltjes de la mesure ρ est définie sur le plan complexe privé de l'intervalle réel $[0,1]$ par la formule : $z \longmapsto S_\rho(z) = \int_0^1 \frac{\rho(t)\,\mathrm{d}t}{z-t}$.
Il est bien connu, et c'est là une des applications des polynômes secondaires, que la suite de fractions

rationnelles $n \longmapsto \dfrac{Q_n(z)}{P_n(z)}$ donne des approximants de Padé au voisinage de $+\infty$ de la transformée de Stieltjes de ρ.
Plus précisément on a la relation, au voisinage de l'infini : $S_\rho(z) - \dfrac{Q_n(z)}{P_n(z)} = O\left(\dfrac{1}{z^{2n}}\right)$.
Or on rappelle la définition d'un approximant de Padé d'une fonction g au voisinage de 0 :
il s'agit d'une fraction rationnelle $F(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ avec degré$(Q) \leqslant q$ et degré$(P) \leqslant p$ telle que :
$g(z) - \dfrac{Q(z)}{P(z)} =_0 O(z^{p+q+1})$. On note alors en abrégé : $\left(\dfrac{Q}{P}\right) = [q/p]_g$.
Dans le cas des polynômes orthogonaux on a : $\left(\dfrac{Q_n}{P_n}\right) = [n-1/n]_{S_\rho}$ (au voisinage de $+\infty$) .
Supposons maintenant qu'une mesure positive bornée μ soit telle que sa transformée de Stieltjes est reliée à celle de ρ par une relation du type : $\boxed{S_\mu(z) = az + b + \dfrac{c}{S_\rho(z)}.}$ ($R(\rho,\mu)$)
Notons $n \longmapsto A_n$ la suite des polynômes orthogonaux pour μ (à un coefficient de normalisation près bien sûr) et par $n \longmapsto B_n$ celle des polynômes secondaires déduits des A_n.
D'après ce qui précède : $S_\mu(z) - \dfrac{B_n(z)}{A_n(z)} =_\infty O\left(\dfrac{1}{z^{2n}}\right)$.
On en déduit que $\dfrac{c}{S_\rho(z)} - \dfrac{B_n(z) - (az+b)A_n(z)}{A_n(z)} =_\infty O\left(\dfrac{1}{z^{2n}}\right)$.
Ou encore, en posant $C_n(z) = \dfrac{B_n(z) - (az+b)A_n(z)}{c}$: $\dfrac{1}{S_\rho(z)} - \dfrac{C_n(z)}{A_n(z)} =_\infty O\left(\dfrac{1}{z^{2n}}\right)$.
Or la théorie nous dit encore qu'au voisinage de l'infini : $S_\rho(z)$ équivaut à $\dfrac{c_0}{z}$ avec $c_0 = \displaystyle\int_0^1 \rho(t)\,\mathrm{d}t$, moment d'ordre 0 de la mesure.
De plus, vu les degrés, $\dfrac{A_n(z)}{C_n(z)}$ est aussi équivalent en l'infini à un terme du type $\dfrac{K}{z}$.
On en déduit alors facilement : $S_\rho(z) - \dfrac{A_n(z)}{C_n(z)} =_\infty O\left(\dfrac{1}{z^{2n+2}}\right)$.
Ceci nous montre que la fraction $\dfrac{A_n(z)}{C_n(z)}$ est un approximant de Padé de $S_\rho(z)$.
À un coefficient de normalisation prés, le numérateur $A_n(z)$ se confond donc avec le polynôme secondaire $Q_{n+1}(z)$. La mesure μ rendra donc bien orthogonale cette suite.
Tout le problème est bien sûr de trouver une mesure μ dont la transformée de Stieltjes est reliée à celle de ρ par une identité du type $R(\rho,\mu)$.
Il se trouve que pour la mesure de Lebesgue on peut trouver explicitement une telle mesure, et ceci grâce à une formule clef qui va maintenant entrer en jeu.

B. Étude particulière dans le cas de la mesure de Lebesgue

Si on considère la fonction constante $x \longmapsto \rho(x) = 1$ sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient la mesure de Lebesgue, et les polynômes orthogonaux correspondants sont dits de Legendre.
On rappelle ci dessous leurs définitions et la formule de récurrence.
$P_n(X) = \dfrac{d^{(n)}}{dX^n}(X^n(1-X)^n)$, soit après développements :
$P_n(X) = n! \sum\limits_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k C_{n+k}^k X^k = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!} X^n + (-1)^{n-1} \dfrac{n(2n-1)!}{(n-1)!} X^{n-1} + \dots$
$Q_n(X) = \displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(t) - P_n(X)}{t - X}\,\mathrm{d}t = n! \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k C_n^k C_{n+k}^k \left(\sum_{i=0}^{i=k-1} \frac{X^i}{k-i}\right)$.
Le carré de la norme de P_n s'obtient en répétant n intégrations par parties.

On obtient : $\|P_n\|^2 = (2n)! \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n \mathrm{d}t = \frac{(n!)^2}{(2n+1)}$.
Ainsi la relation de récurrence classique va s'écrire :

$$\boxed{2(2n+1)XP_n(X) = -P_{n+1}(X) + (2n+1)P_n(X) - n^2P_{n-1}(X).}$$

La transformée de Stieltjes est élémentaire et s'écrit : $\boxed{S_\rho(z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{z-t} = -\ln\left(1-\frac{1}{z}\right).}$

Le point clef pour trouver une mesure μ associée à ρ selon le schéma décrit précédemment réside dans une formule que j'ai obtenue dans les années 80 à la suite de quelques travaux sur la transformée de Laplace de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\Gamma(x)}$ (Voir cheminement dans le précédent chapitre). C'est elle qui m'a permis bien plus tard de déceler cette dualité entre les mesures, par l'intermédiaire de leur transformées de Stieltjes, puis de généraliser la théorie.
Rappelons cette formule déterminante qui se démontre en fait directement par la méthode des résidus :
Pour tout complexe p non réel négatif : $\boxed{\dfrac{1}{Ln(p)} = \dfrac{1}{p-1} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln^2(x)+\pi^2)(x+p)}}$, la détermination du logarithme de p étant choisie dans l'intervalle $]-\pi,\pi[$.
Voyons une première série de résultats que l'on peut en tirer :
Théorème :
La suite des moments relatifs à la mesure positive sur $[0,1]$ *de densité* $x \longmapsto \mu(x) = \dfrac{1}{\ln^2\left(\dfrac{x}{1-x}\right)+\pi^2}$ *est liée aux coefficients du développement en série entière de la fonction* $x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(1-x)}$.
Plus précisément, si on pose $\dfrac{x}{\ln(1-x)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty} a_k x^k$ *on a la relation :* $\forall n \in N\ c_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\mu(x)\mathrm{d}x = a_{n+2}$.

Écrivons pour p réel >0 : $\dfrac{p-1}{\ln(p)} = 1 + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(p-1)\mathrm{d}x}{(\ln^2(x)+\pi^2)(x+p)}$.
On peut dériver sans problème sous l'intégrale, ce qui assure pour $n \geqslant 1$:
$\left(\dfrac{p-1}{\ln(p)}\right)^{(n)} = (-1)^{n+1}n! \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)\mathrm{d}x}{(\ln^2(x)+\pi^2)(p+x)^{n+1}}$. Or $\dfrac{p-1}{\ln(p)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty} a_k(-1)^{k+1}(p-1)^k$.
La comparaison des dérivées successives en 1 donne l'égalité :
$(-1)^{n+1}a_n n! = (-1)^{n+1}n! \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln^2(x)+\pi^2)(x+1)^n}$.
D'où la première relation : $\forall n \geqslant 1 : a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln^2(x)+\pi^2)(x+1)^n}$.
Il suffit alors d'effectuer le changement $t = \dfrac{1}{x+1}$ pour obtenir $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n-2}\mathrm{d}t}{\ln^2(\frac{1-t}{t})+\pi^2}$.
Cette expression des coefficients a_n pour $n \geqslant 1$ donne déjà quelques résultats élémentaires.
¬ Il s'agit d'une suite décroissante de positifs et $\forall n \geqslant 2 : 0 < a_n \leqslant \dfrac{1}{\pi^2(n-1)}$.
¬ La symétrie de la mesure μ par rapport à $\dfrac{1}{2}$, $\mu(1-x) = \mu(x)$, se traduit par l'égalité :
$\displaystyle\int_0^1 t^n\mu(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^n\mu(t)\mathrm{d}t$. D'où par le binôme : $c_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}(-1)^k c_k$.
On obtient ainsi le **bord gauche** de la suite $n \longmapsto c_n$ comme étant $n \longmapsto (-1)^n c_n$.
¬ Partant de l'expression de la constante d'Euler comme l'intégrale classique
$\gamma = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{\ln(x)}\right)\mathrm{d}x$, on obtient par Fubini : $\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x+t}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\ln^2(x)+\pi^2}$, soit encore la

valeur $\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})\mathrm{d}x}{\ln^2(x)+\pi^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)\mu(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.
Utilisant le développement en série entière $-\ln(1-t) = \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \dfrac{t^n}{n}$ on obtient la somme de série $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \dfrac{a_n}{n}$ utilisée par le mathématicien Hollandais J.C Kluyver.
Remarquons que par le produit évident $\dfrac{x}{\ln(1-x)} \times \ln(1-x) = x$, on obtient une génération classique des coefficients a_n : $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour $n \geqslant 2$ $a_n = \dfrac{1}{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{k=n-1} \dfrac{a_{n-k}}{k+1}$.
Ainsi : $a_1 = \dfrac{1}{2} \quad a_2 = \dfrac{1}{12} \quad a_3 = \dfrac{1}{24} \quad a_4 = \dfrac{19}{720} \quad a_5 = \dfrac{3}{160} \quad a_6 = \dfrac{663}{60480}$.
Étudions maintenant la transformée de Stieltjes de μ. Dans tout ce qui suit z représente en fait un réel n'appartenant pas au segment $[0,1]$. Ici encore la formule clef est décisive :
En effet, par changement de variable élémentaire $x = \dfrac{t}{1-t}$

$$S_\mu(z) = \int_0^1 \frac{\mu(t)\mathrm{d}t}{z-t} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln^2(x)+\pi^2)(x+1)[(x(z-1)+z]}.$$

Or $\dfrac{1}{(x+1)[x(z-1)+z]} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1-z}{x(z-1)+z}$ Il vient donc par linéarité :

$$S_\mu(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln^2(x)+\pi^2)(x+1)} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln^2(x)+\pi^2)(x+\frac{z}{z-1})} = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)} - \frac{1}{\frac{z}{z-1}-1}\right].$$

Soit, après simplifications : $\boxed{S_\mu(z) = z - \frac{1}{2} + \frac{1}{\ln(1-\frac{1}{z})} = z - \frac{1}{2} - \frac{1}{S_\rho(z)}.}$

Nous avons donc ici un cas typique (et fondateur) de la théorie développée plus haut.
On peut donc conclure que la famille $n \longmapsto Q_n(X)$ forme pour $n \geqslant 1$ un système orthogonal dans l'espace $\mathscr{L}^2([0,1],\mu)$.
On peut noter que la traduction des orthogonalités sur les coefficients a_n donne les formules suivantes :

$$\boxed{\text{Pour } 1 \leqslant q \leqslant n-2 : \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k C_n^k C_{n+k}^k \left(\sum_{i=0}^{i=k-1} \frac{a_{i+q+2}}{k-i}\right) = 0.}$$

¬ Pour ce qui concerne le caractère isométrique de la correspondance $\widetilde{T}$, on a vu qu'il suffisait de voir si les deux normes au départ : celle de P_1 pour ρ et celle de Q_1 pour μ sont bien ajustées.
Or $\|P_1\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $N(Q_1) = N(-2) = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 4\mu(t)\mathrm{d}t} = 2\sqrt{a_2} = \dfrac{2}{\sqrt{12}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
On peut donc mettre en action l'isométrie $\widetilde{T}$ définie dans le premier paragraphe. Dans ce cas particulier, $\widetilde{T}$ transforme f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, d'intégrale nulle sur cet intervalle, en g définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\mathrm{d}t$.
La mise en œuvre de cette isométrie nous donne alors une interprétation originale de la variance d'une fonction quelconque de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Il suffit en effet de faire agir T sur la différence entre f et son intégrale sur l'intervalle en question. Ceci nous donne la formule originale :

$$\boxed{V(f,[0,1]) = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \int_0^1 g^2(x)\mu(x)\mathrm{d}x.}$$

Ainsi la variance de f s'interprète comme le carré de la norme de sa transformée g pour la mesure μ.
¬ Un premier corollaire immédiat
Si f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, sa variance sur cet intervalle peut toujours s'écrire comme le douzième du carré de la dérivée de f en un certain point de $[0,1]$.
En effet, f étant supposée de classe $\mathscr{C}^1$, l'égalité des accroissements finis nous assure pour tout couple

(t,x) de l'intervalle $[0,1]$ l'existence d'un réel c intermédiaire tel que $\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(c)$. On en déduit l'encadrement : $m \leqslant g(x) \leqslant M$, m et M désignant respectivement les bornes inférieure et supérieure de la dérivée de f sur $[0,1]$.
Que f soit monotone ou non, vu la continuité de f', il va toujours exister deux réels c_1 et c_2 de l'intervalle $[0,1]$ tels que : $(f'(c_1))^2 \displaystyle\int_0^1 \mu(x)\mathrm{d}x \leqslant V(f,[0,1]) \leqslant (f'(c_2))^2 \int_0^1 \mu\mathrm{d}x$.
On termine en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $(f')^2$, la valeur $\dfrac{1}{12}$ étant celle du moment d'ordre 0 de la mesure μ.
La transformée g est rarement facile à expliciter, même pour des fonctions usuelles, cependant sa forme se prête bien comme le montre l'exemple précédent à des techniques d'encadrement où pourront intervenir des inégalités de convexité ou des formules de Taylor.

C. Généralisation

Reprenons la relation évoquée dans le paragraphe 2, soit : $\boxed{S_\mu(z) = az + b + \dfrac{c}{S_\rho(z)}.}$

On rappelle le développement classique au voisinage de l'infini : $S_\rho(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}$, en désignant par c_n le moment d'ordre n de la mesure ρ.
Il est alors évident que les constantes a, b, c intervenant ne peuvent être indépendantes.
À partir du développement élémentaire $S_\rho(z) =_\infty \dfrac{c_0}{z} + \dfrac{c_1}{z^2} + o\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$ on obtient en effet immédiatement : $S_\mu(z) =_\infty \left(a + \dfrac{c}{c_0}\right) z + b - \dfrac{cc_1}{c_0^2} + o(1)$.
Comme $S_\mu(z)$ tend vers 0 à l'infini on en déduit les relations : $c = -ac_0$ et $b = \dfrac{cc_1}{c_0^2} = \dfrac{-ac_1}{c_0}$ Ainsi la relation de dualité entre les deux transformées s'écrit : $S_\mu(z) = a\left(z - \dfrac{c_1}{c_0} - \dfrac{c_0}{S_\rho(z)}\right)$.
Ceci nous donne donc la clef des moments de la mesure cherchée μ et nous met sur la voie d'autres exemples explicites analogues au cas de Lebesgue. Cette étude générale peut se faire simplement en utilisant la formule classique d'inversion de Stieltjes-Perron.

1. Ajustement initial des normes

Nous allons d'abord démontrer que dans le cas où ρ est une mesure de probabilité, c'est à dire que $c_0 = 1$, le choix de la valeur $a = 1$ assure la coïncidence initiale des normes $N(Q_1) = \|P_1\|$, condition requise pour faire de Tune isométrie.
On pourra alors parler de μ comme **la** mesure secondaire relative à ρ.
En effet on démarre avec $P_0(X) = 1$ (c_0=1) et on construit par Schmidt $P_1(X) = X - c_1P_0(X)$.
On a donc $\|P_1\|_\rho^2 = \|X\|_\rho^2 + c_1^2 - 2c_1 < X/P_0(X) >_\rho = c_2 - c_1^2$.
Or $Q_1(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{P_1(t)-P_1(x)}{t-x}\rho(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \rho(t)\mathrm{d}t = c_0 = 1$.
On obtient donc $\|Q_1\|_\mu^2 = \displaystyle\int_0^1 \mu(t)\mathrm{d}t = d_0$.
Or la relation entre les transformées de Stieltjes se traduit directement sur les moments relatifs aux deux mesures grâce aux relations : Pour $|z|$ assez grand : $S_\rho(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}$ et $S_\mu(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{d_n}{z^{n+1}}$.
L'égalité $S_\mu(z) = z - c_1 - \dfrac{1}{S_\rho(z)}$ nous donne donc, par le théorème d'inversion de séries :

Pour tout entier n, $d_n = -\omega_{n+2}$ avec $\boxed{\sum_{n=0}^{n=\infty} \omega_n Z^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n Z^n}}$ au voisinage de 0.

Il vient donc : $\begin{cases} \omega_0 c_0 = 1 \\ \omega_0 c_1 + \omega_1 c_0 = 0 \\ \omega_0 c_2 + \omega_1 c_1 + \omega_2 c_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = 1 \\ \omega_1 = -c_1 \\ \omega_2 = c_1^2 - c_2 \end{cases} \Rightarrow d_0 = -\omega_2 = c_2 - c_1^2 = \|P_1\|_\rho^2.$

On a donc bien vérifié $\|P_1\|_\rho = \|Q_1\|_\mu$.
Il suffit donc bien de choisir $a = 1$ pour avoir le bon ajustement des normes.

2. Explicitation de la mesure secondaire

On rappelle la formule d'inversion de Stieltjes–Perron permettant de reconstituer la mesure positive ρ à partir de sa transformée de Stieltjes.
$\boxed{\forall x \in [0{,}1] : \rho(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{S_\rho(x - i\epsilon) - S_\rho(x + i\epsilon)}{2i\pi}.}$ (Il existe une démonstration élémentaire de cette égalité lorsque ρ est supposée K-Lipschitzienne sur $[0{,}1]$).

Or on sait que $\begin{cases} S_\mu(x - i\epsilon) = x - i\epsilon - c_1 - \dfrac{1}{S_\rho(x - i\epsilon)} \\ S_\mu(x + i\epsilon) = x + i\epsilon - c_1 - \dfrac{1}{S_\rho(x + i\epsilon)} \end{cases}$ dont on déduit :

$S_\mu(x - i\epsilon) - S_\mu(x + i\epsilon) = -2i\epsilon + \dfrac{S_\rho(x - i\epsilon) - S_\rho(x + i\epsilon)}{S_\rho(x - i\epsilon) S_\rho(x + i\epsilon)}.$

D'où en passant à la limite, et vu la formule de Stieltjes–Perron appliquée à ρ :

$\boxed{\forall x \in [0{,}1] : \mu(x) = \frac{\rho(x)}{\pi^+(x)}}$ en posant $\boxed{\pi^+(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} S_\rho(x - i\epsilon) S_\rho(x + i\epsilon)}$

$\neg$ Examinons plus en détail la fonction π^+.

Par définition même : $S_\rho(x - i\epsilon) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\rho(t)\,\mathrm{d}t}{x - i\epsilon - t} = \int_0^1 \frac{(x - t)\rho(t)\,\mathrm{d}t}{(x - t)^2 + \epsilon^2} + i\epsilon \int_0^1 \frac{\rho(t)\,\mathrm{d}t}{(x - t)^2 + \epsilon^2}.$

On en déduit $\dfrac{S_\rho(x - i\epsilon) - S_\rho(x + i\epsilon)}{2i\pi} = \dfrac{\epsilon}{\pi} \displaystyle\int_0^1 \frac{\rho(t)\,\mathrm{d}t}{(x - t)^2 + \epsilon^2}.$

Ainsi, toujours avec Stieltjes Perron : $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon \int_0^1 \frac{\rho(t)\,\mathrm{d}t}{(x - t)^2 + \epsilon^2} = \pi \rho(x).$

Analysons $S_\rho(x - i\epsilon) + S_\rho(x + i\epsilon) = 2 \displaystyle\int_0^1 \frac{(x - t)\rho(t)\,\mathrm{d}t}{(x - t)^2 + \epsilon^2}.$

Si nous posons $\varphi(x) = \displaystyle\lim_{\epsilon \to 0^+} 2 \int_0^1 \frac{(x - t)\rho(t)\,\mathrm{d}t}{(x - t)^2 + \epsilon^2}$, on obtient alors une expression simple de la limite du produit des deux transformées conjuguées, puis de la mesure μ.

$\boxed{\lim_{\epsilon \to 0^+} S_\rho(x - i\epsilon) S_\rho(x + i\epsilon) = \frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2 \rho^2(x)}$ et $\boxed{\mu(x) = \frac{\rho(x)}{\frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2 \rho^2(x)}}.$

On verra par la suite que la fonction φ joue un rôle fondamental pour la connaissance de l'opérateur . Elle permet de déceler une deuxième isométrie importante $\widetilde{S}$ étroitement reliée à $\widetilde{T}$. Nous développerons en détail cette découverte dans le chapitre suivant.

3. Quelques Exemples

$\rho(x)$	1	$2x$	$\dfrac{[\ln(1+a^{-1}))]^{-1}}{(x+a)}$	$\dfrac{12}{\ln^2(x^{-1}-1)+\pi^2}$
$S_\rho(z)$	$-\ln(1-\dfrac{1}{z})$	$-2[1+z\ln(1-\dfrac{1}{z})]$	$\dfrac{\ln(1+a^{-1})-\ln(1-z^{-1})}{(z+a)\ln(1+a^{-1})}$	$12z-6+\dfrac{12}{\ln(1-z^{-1})}$
$\varphi(x)$	$2\ln(\dfrac{x}{1-x})$	$-4[x\ln(x^{-1}-1)+1]$	$\dfrac{2[\ln(1+a^{-1})+\ln(\dfrac{x}{1-x})]}{(x+a)\ln(1+a^{-1})}$	$12[2x-1+\dfrac{2\ln(x^{-1}-1)}{\ln^2(x^{-1}-1)+\pi^2}]$
$\mu(x)$	$\dfrac{1}{\ln^2(x^{-1}-1)+\pi^2}$	$\dfrac{x(2)^{-1}}{[x\ln(x^{-1}-1)+1]^2+\pi^2x^2}$	$\dfrac{(x+a)\ln(1+a^{-1})}{\ln^2\left(\dfrac{(1+a)x}{a(1-x)}\right)+\pi^2}$	$g(x)\ *$

$$* \ g(x)=\frac{1}{12}\frac{\ln^2(x^{-1}-1)+\pi^2}{\left((x-\frac{1}{2})(\ln^2(x^{-1}-1)+\pi^2)+\ln(x^{-1}-1)\right)^2+\pi^2}$$

4. Explicitation simplifiée de φ

Écrivons $\varphi(x)=\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}2\int_0^1\frac{(x-t)\rho(t)\,\mathrm{d}t}{(x-t)^2+\epsilon^2}=\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}2\int_0^1\frac{(x-t)\rho(x)\,\mathrm{d}t}{(x-t)^2+\epsilon^2}+\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}2\int_0^1\frac{(x-t)(\rho(t)-\rho(x))\,\mathrm{d}t}{(x-t)^2+\epsilon^2}$

¬ La première intégrale s'explicite : $\rho(x)\int_0^1\frac{2(x-t)\,\mathrm{d}t}{(x-t)^2+\epsilon^2}=\rho(x)[\ln(x^2+\epsilon^2)-\ln((1-x)^2+\epsilon^2)]$.

Sa limite lorsque ϵ tend vers 0 n'est donc autre que $\varphi_1(x)=2\rho(x)\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

¬ La deuxième intégrale peut s'écrire $2\int_0^1\left(1-\frac{\epsilon^2}{(x-t)^2+\epsilon^2}\right)\frac{\rho(t)-\rho(x)}{x-t}\mathrm{d}t$ et se décompose donc en $-2\int_0^1\frac{\rho(t)-\rho(x)}{t-x}\mathrm{d}t+2\epsilon^2\int_0^1\frac{1}{(x-t)^2+\epsilon^2}\frac{\rho(t)-\rho(x)}{t-x}\mathrm{d}t$.

Si la mesure ρ est supposée K-Lipschitzienne, par exemple de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, on montre facilement que l'intégrale $J(\epsilon)=2\epsilon^2\int_0^1\frac{1}{(x-t)^2+\epsilon^2}\frac{\rho(t)-\rho(x)}{t-x}\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque ϵ tend vers 0. En effet, si on suppose la majoration uniforme $|\rho(t)-\rho(x)|\leqslant K\,|t-x|$, on en déduit immédiatement : $|J(\epsilon)|\leqslant 2K\epsilon^2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(t-x)^2+\epsilon^2}\leqslant 2K\pi\epsilon$. La limite de la deuxième intégrale intervenant dans l'expression de φ est alors $\varphi_2(x)=-2\int_0^1\frac{\rho(t)-\rho(x)}{t-x}\mathrm{d}t$.

On a donc dans ce cas une expression explicite de la fonction φ :

$$\boxed{\varphi(x)=2\rho(x)\ln(\frac{x}{1-x})-2\int_0^1\frac{\rho(t)-\rho(x)}{t-x}\mathrm{d}t}$$

Les exemples précédents s'accordent bien avec cette formule qui montre l'importance fondamentale dans la théorie générale du cas de la mesure de Lebesgue et de la réductrice $x\longmapsto 2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ relative à cette mesure (voir détails chapitre suivant). Voici d'autres exemples de calcul de φ.

- Pour $\rho(x)=(n+1)x^n$, $\varphi(x)=2(n+1)\left[x^n\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)-\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\frac{x^k}{n-k}\right]$
- Pour $\rho(x)=\frac{4}{\pi(x^2+1)}$, $\varphi(x)=\frac{2}{\pi(x^2+1)}\left[4\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)+2\ln(2)+\pi x\right]$
- Pour $\rho(x)=-\ln(x)$, $\varphi(x)=\frac{2\pi^2}{3}-\ln^2(x)-2\,\mathrm{dilog}(1-x)$

Conditions pour q'une mesure soit secondaire

Est il possible d'inverser la recherche, c'est-à-dire de construire à partir d'une mesure positive bornée donnée μ sur $[0,1]$, une mesure ρ sur le même intervalle dont μ soit la secondaire?

Le couplage des transformées de Stieltjes donne d'abord : $S_\rho(z) = \dfrac{1}{z - c_1 - S_\mu(z)}$.

Puis les formules d'inversion nous conduisent à définir : $\rho(x) = \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \dfrac{S_\rho(x - i\epsilon) - S_\rho(x + i\epsilon)}{2i\pi}$.

Après simplifications, et vu la même formule appliquée à la mesure μ, on obtient sans problèmes :

$$\rho(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\mu(x)}{(x - c_1)^2 - (x - c_1)[S_\mu(x - i\epsilon) + S_\mu(x + i\epsilon)] + S_\mu(x - i\epsilon)S_\mu(x + i\epsilon)}.$$

En posant $\psi(x) = \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} S_\mu(x - i\epsilon) + S_\mu(x + i\epsilon)$ et avec $2i\pi\mu(x) = \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} S_\mu(x - i\epsilon) - S_\mu(x + i\epsilon)$, on peut conclure enfin : $\rho(x) = \dfrac{\mu(x)}{(x - c_1)^2 - (x - c_1)\psi(x) + \dfrac{\psi^2(x)}{4} + \pi^2\mu^2(x)}$.

Soit, en simplifiant : $\rho(x) = \dfrac{\mu(x)}{\left[\dfrac{\psi(x)}{2} - (x - c_1)\right]^2 + \pi^2\mu^2(x)}$.

Tout le problème maintenant pour vérifier que la mesure secondaire relative à ρ est bien μ consiste à ajuster effectivement les valeurs des deux premiers moments de ρ.

Il nous faut en effet $\displaystyle\int_0^1 \rho(x)dx = 1$ et $\displaystyle\int_0^1 x\rho(x)dx = c_1$.

Ceci nous donne les conditions sous forme de deux redoutables équations d'inconnue c_1 :

$$\int_0^1 \frac{\mu(x)dx}{\left[\dfrac{\psi(x)}{2} - (x - c_1)\right]^2 + \pi^2\mu^2(x)} = 1 \text{ et } \int_0^1 \frac{(x - c_1)\mu(x)dx)}{\left[\dfrac{\psi(x)}{2} - (x - c_1)\right]^2 + \pi^2\mu^2(x)} = 0$$