Je me suis amusé un jour, vers les années 1980, à étudier les suites de réels définies de proche en proche par le procédé récurrent : $x_{n+3} = \dfrac{x_n x_{n+2} - (x_{n+1})^2}{x_n + x_{n+2} - 2x_{n+1}}$
Autrement dit les suites pour lesquelles le procédé d'accélération de convergence d'Aitken revient à évaluer un nouveau terme.
On montre facilement que si $x = \dfrac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$ n'est pas un entier négatif, la suite en question converge vers $\ell = x_0 + (x_1 - x_0)\left[1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{x(x+1)\dots(x+k)}\right]$.
De plus, si l'on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{x(x+1).....(x+k)}$, on obtient l'expression intégrale valable pour $x > 0$:
$f(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$, ainsi que la relation fonctionnelle $f(x+1) = 1 - xf(x)$.
Cette équation peut se traduire en introduisant la fonction gamma, sous la forme :

$$\boxed{\frac{f(x+1)}{\Gamma(x+1)} + \frac{f(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\Gamma(x+1)}}$$

La fonction gamma a donc quelque part un subtil rapport avec le procédé d'accélération d'Aitken-Romberg.
¬ Parmi les calculs de l'intégrale classique $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \pi$, il en est un qui consiste à découper l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ en intervalles de longueur π, ce qui conduit à l'expression :

$$I = \int_0^{\pi} \sin(x) \left[\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2\pi^2}\right] \mathrm{d}x.$$

On conclut alors grâce aux séries de Fourier qui permettent de condenser la somme entre crochets en $\dfrac{1}{\sin(x)}$.
J'ai eu alors l'idée d'appliquer ce principe de découpage pour évaluer d'abord $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\Gamma(x)} \mathrm{d}x$, car apparaissait naturellement la somme $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{x(x+1)\dots(x+k)}$ présentée plus haut.
J'ai ensuite généralisé ce calcul pour étudier $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)} \mathrm{d}x$, c'est à dire la transformée de Laplace de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\Gamma(x)}$. Voyons en détail la progression de cette analyse.

Étude de la transformée de Laplace de $x \longmapsto \dfrac{1}{\Gamma(x)}$

A. Définition, convergence, dérivabilité.

On définit classiquement cette transformée de Laplace par : $F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-px} \mathrm{d}x}{\Gamma(x)}$, avec p paramètre complexe.

1. Convergence de l'intégrale

¬ La borne réelle 0 ne pose aucun problème puisque quel que soit p : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)} = 0$

En effet, au voisinage de 0 , $\Gamma(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{x}$.

¬ Pour la borne infinie, envisageons d'abord p réel.

– Si $p > 0$, on conclut facilement en se rappelant que sur $]0,+\infty[$ la fonction gamma est minorée par un réel $m > 0$. On aura donc pour tout $x > 0$: $0 < \dfrac{\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)} \leqslant \dfrac{1}{m}\mathrm{e}^{-px}$

– Si $p \leqslant 0$, utilisons la relation classique $\Gamma(x+2) = (x+1)x\Gamma(x)$. Elle ramène l'étude de la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)}\mathrm{d}x$ à celle de $\mathrm{e}^{-2p}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x}{(x+1)x\Gamma(x)}$.

Vu la convergence évidente de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)x}$, il nous suffit d'établir que la fonction $x \longmapsto g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)}$ admet une limite réelle en $+\infty$.

Or $g'(x) = g(x)\left[-p - \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right]$, et pour $x > 0$: $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(x+n)}$ (avec γ constante d'Euler).

On en déduit la minoration : $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \geqslant -\gamma - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{1\leqslant n\leqslant x} \frac{1}{n}$ et par suite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = +\infty$.

La fonction g est donc positive et décroissante sur un voisinage de $+\infty$, donc admet bien une limite réelle en $+\infty$.

Enfin pour p complexe quelconque, la convergence est absolue car $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)}\right| = \dfrac{\mathrm{e}^{-[\mathrm{Re}(p)]x}}{\Gamma(x)}$. La transformée de Laplace F est donc définie sur le plan complexe entier.

2. Dérivabilité de F

Écrivons pour p complexe : $F(p) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x}{\Gamma(x)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x}{\Gamma(x)}$

¬ Pour l'intégrale sur le compact $[0,1]$, la dérivabilité par rapport au paramètre p s'obtient simplement en invoquant la continuité sur $[0,1] \times \mathbb{C}$ de la fonction : $(x,p) \longmapsto \dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)}\right) = \dfrac{-x\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)}$.

On prolonge bien sûr $\dfrac{1}{\Gamma}$ par continuité en 0 par $\left(\dfrac{1}{\Gamma}\right)(0) = 0$.

¬ Pour $G(p) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x}{\Gamma(x)} = \mathrm{e}^{-p}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x}{x\Gamma(x)}$, remarquons que $\dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-px}}{x\Gamma(x)}\right) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)}$.

Plaçons nous alors sur la bande de plan complexe définie par $a \leqslant \mathrm{Re}(p) \leqslant b$, avec a et b réels quelconques.

Sur cette zone : $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)}\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-ax}}{\Gamma(x)}$. Cette majoration par une fonction d'intégrale convergente sur $[0,+\infty[$ entraîne la dérivabilité par rapport à p en tout point de la bande ouverte $a < \mathrm{Re}(p) < b$ de la fonction G et donne donc vu la notion de localité :

$$\forall p \in \mathbb{C} \ : \ G'(p) = \mathrm{e}^{-p}\int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x}{\Gamma(x)} - \mathrm{e}^{-p}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x}{x\Gamma(x)} = -\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)\mathrm{e}^{-p(x+1)}\mathrm{d}x}{x\Gamma(x)}$$

Par décalage élémentaire, cela s'écrit simplement : $G(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-x\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x}{\Gamma(x)}$.

La transformée de Laplace F est donc dérivable sur tout le plan complexe, suivant la formule :

$$\forall\ p \in \mathbb{C},\ F'(p) = \int_0^{+\infty} \frac{-x\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x}{\Gamma(x)}.$$

Plus généralement on peut prouver facilement par récurrence que pour tout entier n, la transformée F est dérivable à l'ordre n sur $\mathbb{C}$ suivant la formule : $F^{(n)}(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(-x)^n\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x}{\Gamma(x)}$.

Choisissons en effet un réel $a > 0$ et plaçons p sur la zone ouverte définie par $\mathrm{Re}(p) > -a$.

On peut alors majorer pour $x > 0$: $\left|\dfrac{(-x)^n\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)}\right| \leqslant \dfrac{x^n\mathrm{e}^{ax}}{\Gamma(x)}$.

Or pour x et a positifs : $\mathrm{e}^{ax} \geqslant \dfrac{(ax)^n}{n!}$. On en déduit : $\left|\dfrac{(-x)^n \mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)}\right| \leqslant \dfrac{n!\mathrm{e}^{2ax}}{a^n\Gamma(x)}$.
On conclut avec la convergence étudiée précédemment de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2ax}\,\mathrm{d}x}{\Gamma(x)}$.

B. Évaluation de $F(p)$ par découpage, lorsque p est réel.

¬ On commence par une partition classique de $[0, +\infty[$ en segments de longueur 1.
Ainsi : $\displaystyle F(p) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k=n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x}{\Gamma(x)}$
On ramène ensuite l'intégrale sur chacun des segments en intégrale sur $[0,1]$ par translations élémentaires. Il vient alors :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x}{\Gamma(x)} = \mathrm{e}^{-pk} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x}{\Gamma(x+k)} = \mathrm{e}^{-pk} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x}{\Gamma(x)x(x+1)\dots.(x+k-1)}$$

Par sommations finies : $\displaystyle F(p) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)} \left[1 + \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\mathrm{e}^{-pk}}{x(x+1)\dots..(x+k-1)}\right] \mathrm{d}x$.
Ou encore, par décalages d'indices et en posant $\lambda = \mathrm{e}^{-p}$:
$\displaystyle F(p) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)} \left[1 + \lambda \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\lambda^k}{x(x+1)\dots..(x+k)}\right] \mathrm{d}x$
¬ On utilise alors l'égalité, obtenue facilement à l'aide d'intégrations par parties répétées :

$$\forall\ x > 0 \text{ et } \forall\ k \in \mathbb{N},\ \frac{\lambda^k}{x(x+1)\dots(x+k)} = \int_0^1 (1-t)^{x-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\,\mathrm{d}t.$$

Ceci nous donne $\displaystyle F(p) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)} \left[1 + \lambda \int_0^1 (1-t)^{x-1} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x$.

¬ La suite de fonctions de variable t, $\displaystyle n \longmapsto \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. Vu la convergence de $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{x-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$, on peut donc écrire que pour tout $x > 0$:
$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-t)^{x-1} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^{x-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$.
Considérons alors la suite de fonctions de variable x définies sur $]0,1]$ par la formule

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)} \left[1 + \lambda \int_0^1 (1-t)^{x-1} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\,\mathrm{d}t\right]$$

Elle est croissante, vu que $\lambda > 0$ et converge simplement vers $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)} \left[1 + \lambda \int_0^1 (1-t)^{x-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t\right]$.
On en déduit d'après le théorème de convergence monotone (Beppo-Levi), la première formule :

$$\boxed{F(p) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)} \left[1 + \lambda \int_0^1 (1-t)^{x-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x}$$

¬ Utilisons maintenant la formule des compléments :

$$\forall x \in]0,1[,\ \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Il vient $F(p) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-px}\sin(\pi x)\Gamma(1-x)\left[1+\lambda\int_0^1 (1-t)^{x-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x.$

En changeant x en $1-x$: $\boxed{F(p) = \dfrac{\lambda}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{px}\sin(\pi x)\Gamma(x)\left[1+\lambda\int_0^1 (1-t)^{-x}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x.}$

Nous allons décomposer en somme $F(p) = F_1(p) + F_2(p)$ et étudier séparément les deux facteurs. Vu la positivité des fonctions intervenant, on va pouvoir facilement, grâce à Fubini, effectuer des échanges d'intégrale. Nous allons commencer par établir une première égalité :

¬ $\boxed{F_1(p) = \dfrac{\lambda}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{px}\sin(\pi x)\Gamma(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{(x+\lambda)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{x[(\ln(x)+p)^2+\pi^2]}.}$

Partons de la définition intégrale de gamma : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{x-1}\mathrm{e}^{-u}du.$

On en déduit :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{px}\sin(\pi x)\Gamma(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{px}\sin(\pi x)\left(\int_0^{+\infty} u^{x-1}\mathrm{e}^{-u}du\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\left[\int_0^1 \mathrm{e}^{px}u^x\sin(\pi x)\mathrm{d}x\right]du.$$

L'intégrale sur $[0,1]$ est élémentaire, on obtient en effet grâce aux exponentielles complexes :

$$\frac{1}{2i}\left[\frac{\mathrm{e}^{(p+\ln(u)+i\pi)x}}{p+\ln(u)+i\pi} - \frac{\mathrm{e}^{(p+\ln(u)-i\pi)x}}{p+\ln(u)-i\pi}\right] = \frac{\pi(u\mathrm{e}^p+1)}{(p+\ln(u))^2+\pi^2} \quad .$$

Vu que $\lambda = \mathrm{e}^{-p}$, on en déduit

$F_1(p) = \dfrac{\lambda}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{px}\sin(\pi x)\Gamma(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{(u+\lambda)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u}{u[(p+\ln(u))^2+\pi^2]}$ ce qu'il fallait démontrer.

¬ Nous allons maintenant effectuer un travail identique pour l'autre intégrale et montrer :

$$\boxed{F_2(p) = \frac{\lambda^2}{\pi}\int_0^1 \mathrm{e}^{px}\sin(\pi x)\Gamma(x)\left(\int_0^1 (1-t)^{-x}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \lambda\int_0^{+\infty}\frac{(\mathrm{e}^{x+\lambda}-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{x[(\ln(x)+p)^2+\pi^2]}.}$$

Une première permutation transforme l'intégrale étudiée en :

$$F_2(p) = \frac{\lambda^2}{\pi}\int_0^1\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{px}\sin(\pi x)\Gamma(x)(1-t)^{-x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{\lambda^2}{\pi}\int_0^1 K(t)\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}t.$$

Puis, par explicitation de gamma, on transforme l'intégrale de variable x en :

$$K(t) = \int_0^1 \mathrm{e}^{px}\sin(\pi x)(1-t)^{-x}\left(\int_0^{+\infty} u^{x-1}\mathrm{e}^{-u}du\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{px}\sin(\pi x)(1-t)^{-x}u^x\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}du.$$

Sur l'intervalle $[0,1]$ on évalue facilement une primitive, il suffit de reprendre le calcul effectué dans le paragraphe précédent en remplaçant formellement u par $\dfrac{u}{1-t}$ car $(1-t)^{-x}u^x = \mathrm{e}^{x\ln(\frac{u}{1-t})}$. Cela nous conduit à :

$$J(u) = \int_0^1 \mathrm{e}^{px}\sin(\pi x)(1-t)^{-x}u^x\mathrm{d}x = \frac{\pi\left[\dfrac{u}{1-t}\mathrm{e}^p+1\right]}{\left[p+\ln\left(\dfrac{u}{1-t}\right)\right]^2+\pi^2},$$ ceci pour $t\in[0,1[$ et $u\in]0,+\infty[$.

D'où l'égalité $K(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} J(u)\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}du = \pi\int_0^{+\infty}\frac{\left[\dfrac{u}{1-t}\mathrm{e}^p+1\right]}{\left[p+\ln\left(\dfrac{u}{1-t}\right)\right]^2+\pi^2}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}du.$

Le changement de variable $u = (1-t)x$ donne :

$$\int_0^{+\infty} J(u)\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}du = \pi\int_0^{+\infty}\frac{[x\mathrm{e}^p+1]}{[p+\ln(x)]^2+\pi^2}\frac{\mathrm{e}^{-x(1-t)}}{x}\mathrm{d}x.$$

Ainsi $F_2(p) = \dfrac{\lambda^2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 K(t)\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}t = \lambda\int_0^1\left(\int_0^{+\infty}\frac{(x+\lambda)\mathrm{e}^{-x(1-t)}\mathrm{d}x}{x([p+\ln(x)]^2+\pi^2)}\right)\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}t$

Un nouvel échange des bornes nous donne enfin

$$F_2(p) = \lambda\int_0^{+\infty}\frac{(x+\lambda)\mathrm{e}^{-x}}{x([p+\ln(x)]^2+\pi^2)}\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{(\lambda+x)t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \lambda\int_0^{+\infty}\frac{(\mathrm{e}^{x+\lambda}-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{x([p+\ln(x)]^2+\pi^2)}.$$

¬ La synthèse des deux transformations nous donne la formule, toujours dans le cas où p est une variable

réelle :
$F(p) = F_1(p) + F_2(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x} + \lambda \mathrm{e}^{\lambda}}{x([p+\ln(x)]^2+\pi^2)}\mathrm{d}x$. Ceci se transforme facilement en :
$F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{[\ln(x)+p]^2+\pi^2} + \lambda \mathrm{e}^{\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x([\ln(x)+p]^2+\pi^2)}$.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x([\ln(x)+p]^2+\pi^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+p)^2+\pi^2} = 1$.
On a donc établi après bien des détours et permutations la formule valable pour tout réel p :

$$\boxed{F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x}{\Gamma(x)} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{(\ln(x)+p)^2+\pi^2} + \mathrm{e}^{-p}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-p}}.}$$

C. Transformée de Stieltjes de la fonction $x \longmapsto \left[\ln^2(x)+\pi^2\right]^{-1}$

1. Transformée de Laplace de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\Gamma(x+1)}$

¬ On considère ici un réel α quelconque et on étudie l'intégrale double :

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(x)} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}p.$$

D'après le théorème de Fubini, puisque les fonctions considérées sont positives, on peut écrire :
$J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}p \right) \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\Gamma(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x\Gamma(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\Gamma(x+1)}\mathrm{d}x$.
¬ Sous la forme initiale, et vu l'expression de $F(p)$ trouvée précédemment, on a aussi :
$J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{[\ln(x)+\alpha+p]^2+\pi^2} + \mathrm{e}^{-(\alpha+p)}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-(\alpha+p)}} \right) \mathrm{d}p$.
En permutant à nouveau les variables on obtient :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{[\ln(x)+\alpha+p]^2+\pi^2} \right) \mathrm{d}p = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{[\ln(x)+\alpha+p]^2+\pi^2} \right) \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.
Ceci est encore égal à : $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} [\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(\frac{\ln(x)+\alpha}{\pi})]\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.
En intégrant par parties, cette intégrale se transforme facilement en :
$\displaystyle\frac{1}{\pi}\left[(1-\mathrm{e}^{-x})\left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{\ln(x)+\alpha}{\pi}\right)\right]\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{[(\ln(x)+\alpha)^2+\pi^2]}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{[(\ln(x)+\alpha)^2+\pi^2]}\frac{\mathrm{d}x}{x}$.
Pour l'autre terme qui constitue $J(\alpha)$ on a de manière évidente : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+p)}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-(\alpha+p)}}\mathrm{d}p = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-\alpha}} - 1$.
On en déduit par comparaison des deux modes de calcul de $J(\alpha)$ et pour tout réel α

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x}{\Gamma(x+1)} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-\alpha}} - 1 + \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{[(\ln(x)+\alpha)^2+\pi^2]}\frac{\mathrm{d}x}{x}.}$$

2. Application au calcul d'une transformée de Stieltjes

En posant $\alpha = -\ln(t)$ dans la formule précédente on obtient :

$$\boxed{\forall t > 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{t^x\mathrm{d}x}{\Gamma(x+1)} = \mathrm{e}^t - 1 + \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{[(\ln(x)-\ln(t))^2+\pi^2]}\frac{\mathrm{d}x}{x}.} \ (F_t)$$

Considérons alors pour $p > 0$ l'intégrale double :
$I(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^x\mathrm{d}x}{\Gamma(x+1)} \right) \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \right) \frac{\mathrm{d}x}{\Gamma(x+1)}$.
¬ Par définition même de la fonction Gamma , il vient sous la condition $p > 1$:

$I(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{p^{x+1}}\frac{\mathrm{d}x}{\Gamma(x+1)}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{p^{x+1}}=\frac{1}{p\ln(p)}$.

¬ Or en utilisant la formule (F_t) ci dessus on obtient :

$I(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^t-1)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{(1-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x}{[(\ln(x)-\ln(t))^2+\pi^2]x}\right)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$.

En changeant x en tx dans cette dernière intégrale on peut écrire :

$I(p)=\displaystyle\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}+\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{(1-\mathrm{e}^{-tx})\mathrm{d}x}{[\ln^2(x)+\pi^2]x}\right)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$.

En permutant à nouveau les bornes on arrive à $I(p)=\displaystyle\frac{1}{p(p-1)}+\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-pt}-\mathrm{e}^{-t(x+p)}}{[\ln^2(x)+\pi^2]x}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$.

C'est à dire : $I(p)=\displaystyle\frac{1}{p(p-1)}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{p(x+p)[\ln^2(x)+\pi^2]}$.

La comparaison des deux modes de calcul de $I(p)$ amène donc l'égalité suivante :

$$\boxed{\forall p>1,\ \frac{1}{\ln(p)}=\frac{1}{p-1}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+p)[\ln^2(x)+\pi^2]}}$$

Cette formule déduite ici d'un long cheminement dans le calcul symbolique, se prolonge en fait à tout complexe p non réel négatif par prolongement analytique, la détermination de l'argument du logarithme étant choisie dans $]-\pi,\pi[$. On peut aussi la vérifier directement par le théorème des résidus. Nous allons voir que cette relation se révèle particulièrement efficace dans certains domaines. **Elle est en particulier une clef remarquable pour l'étude des polynômes orthogonaux de Legendre. Mais cela je ne l'ai vu que vingt ans après l'avoir découverte !**

Pour l'instant étudions quelques applications directes.

3. Explicitation intégrale des nombres de Bernoulli

¬ En posant $p=\mathrm{e}^t$ dans la formule précédente, on obtient pour tout réel $t>0$:

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{\mathrm{e}^t-1}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+\mathrm{e}^t)[\ln^2(x)+\pi^2]}=\frac{1}{\mathrm{e}^t-1}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)[(\ln(x)+t)^2+\pi^2]}.$$

Rappelons qu'une des générations des nombres de Bernoulli est celle de la décomposition en série entière :

$\forall t\in]0,1],\ \displaystyle\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}=1+\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\beta_k}{k!}t^k$.

On a donc avec ce qui précède : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)[(\ln(x)+t)^2+\pi^2]}=-\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\beta_k}{k!}t^{k-1}$.

Si on pose $H(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)[(\ln(x)+t)^2+\pi^2]}$, on aura donc pour tout entier $k\geqslant 1$:

$\displaystyle\frac{H^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}=-\frac{\beta_k}{k!}$, c'est à dire $\beta_k=-kH^{(k-1)}(0)$.

¬ Décomposons $f_x(t)=\displaystyle\frac{1}{(\ln(x)+t)^2+\pi^2}=\frac{1}{2i\pi}\left[\frac{1}{\ln(x)+t-i\pi}-\frac{1}{\ln(x)+t+i\pi}\right]$.

On en déduit que pour tout entier $k\geqslant 1$:

$f_x^{(k-1)}(t)=\displaystyle\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2i\pi}\left[\frac{1}{(\ln(x)+t-i\pi)^k}-\frac{1}{(\ln(x)+t+i\pi)^k}\right]$.

Or on vérifie assez facilement que l'on est bien pour H dans les conditions d'application du théorème de dérivations successives sous l'intégrale. Il suffit de découper :

$H(t)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)[(\ln(x)+t)^2+\pi^2]}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)[(\ln(x)+t)^2+\pi^2]}$.

– Sur l'intervalle compact $[0,1]$ il n'y a pas de problèmes vu la continuité des fonctions $(x,t)\longmapsto\displaystyle\frac{f_x^{(k-1)}(t)}{1+x}$.

– Sur l'intervalle $[1,+\infty[$ on remarque que $x \geqslant 1 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{(\ln(x)+t-i\pi)^k}\right| \leqslant \dfrac{1}{(\ln^2(x)+\pi^2)^{\frac{k}{2}}}$.
 Or les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln^2(x)+\pi^2)^a} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\pi^2)^a}$ sont convergentes dés que $a > \dfrac{1}{2}$.
 On peut donc écrire
 pour $k>1$: $\displaystyle H^{(k-1)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(\ln(x)-i\pi)^k} - \frac{1}{(\ln(x)+i\pi)^k}\right] \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$.
 Soit en changeant de variable : $\displaystyle H^{(k-1)}(0) = \mathrm{Im}\left((-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\frac{\mathrm{d}x}{(x-i\pi)^k}\right)$.
 Ceci nous donne pour le nombre de Bernoulli d'ordre $k>1$ l'expression intégrale :

$$\boxed{\beta_k = \frac{(-1)^k k!}{\pi}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\frac{\mathrm{d}x}{(x-i\pi)^k}\right)}$$

4. Application au calcul des sommes des séries de Riemann d'ordre pair

Rappelons la définition de la fonction Zéta de Riemann : $\displaystyle z \longmapsto \zeta(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^z}$.
On considère ici la fonction analytique $z \longmapsto f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{1+\mathrm{e}^z} \times \dfrac{1}{(z-i\pi)^k}$, n_0 un entier non nul fixé et le chemin fermé C formé par le segment réel parcouru de $-2\left(n_0-\dfrac{1}{2}\right)\pi$ à $2\left(n_0-\dfrac{1}{2}\right)\pi$, suivi du demi-cercle de centre O et de rayon $2\left(n_0-\dfrac{1}{2}\right)\pi$ parcouru dans le sens direct.
Les résidus de f à l'intérieur de ce contour sont :

¬ Au pôle $z_n = i\pi + 2ni\pi$ avec $0 < n \leqslant n_0 - 1$: $\mathrm{Res}(f,z_n) = \dfrac{\mathrm{e}^{z_n}}{\mathrm{e}^{z_n}(z_n-i\pi)^k} = \dfrac{1}{(2ni\pi)^k}$.

¬ Au pôle $i\pi$: $\mathrm{Res}(f,i\pi) = \dfrac{\beta_k}{k!}$.

En effet, au voisinage de $x=0$: $f(i\pi+x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1} \times \dfrac{1}{x^k} = \dfrac{1}{x^k} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1} \times \dfrac{1}{x^k}$.
Pour $k>1$ le coefficient du terme en $\dfrac{1}{x}$ est donc bien $\dfrac{\beta_k}{k!}$.
Toujours pour $k>1$, on vérifie facilement que l'intégrale le long du demi-cercle tend vers 0 lorsque le rayon, c'est-à-dire n_0 tend vers $+\infty$. (Lemme de Jordan)
L'application à f sur le chemin C du théorème des résidus nous donne alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\frac{\mathrm{d}x}{(x-i\pi)^k} = 2i\pi\left[\frac{\beta_k}{k!} + \frac{1}{(2i\pi)^k}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^k}\right].$$

Vu l'écriture intégrale des nombres de Bernoulli, on obtient l'égalité :
$\displaystyle \beta_k = (-1)^k k! \mathrm{Im}\left(2i\left[\frac{\beta_k}{k!} + \frac{1}{(2i\pi)^k}\zeta(k)\right]\right)$.
Ainsi pour $k=2q$ nombre pair on retrouve la formule classique : $\boxed{\beta_{2q} = \dfrac{(-1)^{q+1}2(2q)!\zeta(2q)}{(2\pi)^{2q}}.}$

5. Quelques expressions de la constante d'Euler

On rappelle la définition première : $\displaystyle \gamma = \lim_{n\to+\infty} H_n - \ln(n) = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$.
Cette constante remarquable a de nombreuses représentations sous forme intégrale ou de somme de série.
Par exemple une écriture classique est : $\displaystyle \gamma = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)}\right)\mathrm{d}t$.

Les formules données ci dessous, en conséquence de la formule clef ne sont pas dans le répertoire classique, bien qu'elles soient comme on va le voir étroitement reliées à d'autres expressions bien connues.

¬ En utilisant notre formule fondamentale : $\dfrac{1}{\ln(p)} = \dfrac{1}{p-1} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+p)[\ln^2(x)+\pi^2]}$,

On en déduit par Fubini : $\gamma = \displaystyle\int_0^1 \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+t)[\ln^2(x)+\pi^2]}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x+t}\right) \frac{\mathrm{d}x}{\ln^2(x)+\pi^2}$.

D'où la première expression : $\boxed{\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}{\ln^2(x)+\pi^2}.}$

¬ Décomposons ensuite $\gamma = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\mathrm{d}x}{\ln^2(x)+\pi^2} - \int_0^1 \frac{\ln(x)\mathrm{d}x}{\ln^2(x)+\pi^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}{\ln^2(x)+\pi^2}$.

En posant $x = \mathrm{e}^{-t}$ dans les deux premières intégrales et $x = \mathrm{e}^{t}$ dans la dernière on obtient :

$\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})\ln(1+\mathrm{e}^{-t})}{t^2+\pi^2}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}{t^2+\pi^2}$.

On utilise alors le développement usuel : $\ln(1+\mathrm{e}^{-t}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-nt}}{n}$.

Celui ci donne par produit $(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})\ln(1+\mathrm{e}^{-t}) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{2} + \displaystyle\sum_{n=2}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{2n}{n^2-1}\mathrm{e}^{-nt}$.

Ainsi grâce au théorème de Beppo-Levi on peut décomposer la première intégrale en :

$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}{t^2+\pi^2} + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2n}{n^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t}{t^2+\pi^2}$.

(On a en effet une série alternée de module décroissant avec l'intégrale du terme général tendant vers 0 à l'infini). On écrit alors par transformations classiques :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t}{t^2+\pi^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)\mathrm{d}t}{t+n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(n\pi x)}{x+1}\mathrm{d}x$;

Puis : $\displaystyle\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2n}{n^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t}{t^2+\pi^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2n}{n^2-1} \frac{\sin(n\pi x)\mathrm{d}x}{x+1}$.

On reconnaît sous l'intégrale une décomposition usuelle en série de Fourier.

En effet pour $x \in]-\pi,\pi[$: $x\cos(x) + \dfrac{\sin(x)}{2} = \displaystyle\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2n\sin(nx)}{n^2-1}$.

On aura donc sur]-1, 1[: $x\cos(\pi x) + \dfrac{\sin(\pi x)}{2\pi} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2n\sin(n\pi x)}{n^2-1}$.

Notons alors $x \longmapsto \overleftrightarrow{x\cos(\pi x)}$, la fonction de période 2 coïncidant avec $x \longmapsto \cos(\pi x)$ sur l'intervalle $[-1,1[$.

La synthèse des calculs précédents donne :

$\gamma = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}{t^2+\pi^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\overleftrightarrow{x\cos(\pi x)}\mathrm{d}x}{x+1} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)\mathrm{d}x}{2(x+1)} + \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}{t^2+\pi^2}$.

Or on sait que $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)\mathrm{d}x}{x+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}{t^2+\pi^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}{t^2+\pi^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)\mathrm{d}x}{x+1}$.

Il nous reste donc : $\gamma = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\overleftrightarrow{x\cos(\pi x)}\mathrm{d}x}{x+1} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)\mathrm{d}x}{x+1}$.

En utilisant la convention d'écriture ci dessus pour représenter une fonction de période 2, on aura donc la formule synthétique :

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{\overleftrightarrow{(x+1)\cos(\pi x)}\mathrm{d}x}{x+1}}$$

¬ **Retour aux nombres de Bernoulli.** Nous allons maintenant expliciter cette intégrale en utilisant la fonction partie entière. Cela va nous permettre par découpage classique déjà utilisé et à l'aide d'intégrations

par parties élémentaires, d'obtenir d'autres écritures de la constante d'Euler avec apparition naturelle des nombres de Bernoulli.
On notera ici $E(x)$ la partie entière d'un réel x quelconque, c'est à dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal àx.
Notons par f la fonction de période 2 définie plus haut par $x \longmapsto f(x) = \overleftrightarrow{(x+1)\cos(\pi x)}$.
Pour tout entier k et tout réel x, $f(x) = f(x-2k)$. Si on veut choisir k tel que $x-2k$ appartienne à l'intervalle de base $[-1{,}1[$ on est conduit à : $k \leqslant \dfrac{x+1}{2} < k+1$.
Ainsi $k = E\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ et par suite $f(x) = f(x-2k) = \left(x+1-2E\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right)\cos(\pi x)$.
Le changement de variable $t = \dfrac{x+1}{2}$ dans la dernière expression intégrale de γ obtenue nous conduit alors à : $\gamma = \dfrac{1}{2} + 2\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\left(\frac{E(t)-t}{t}\right)\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + 2\int_1^{+\infty}\frac{E(t)-t}{t}\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t$.
Pour tout entier k, on a naturellement :
$I_k = \displaystyle\int_k^{k+1}\left(\frac{E(t)-t}{t}\right)\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t = k\int_k^{k+1}\frac{\cos(2\pi t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_k^{k+1}\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t = k\int_k^{k+1}\frac{\cos(2\pi t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
En intégrant par parties : $I_k = \dfrac{k}{2\pi}\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\sin(2\pi t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_k^{k+1}\frac{E(t)\sin(2\pi t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Ainsi, par découpage on obtient une nouvelle écriture : $\gamma = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{E(t)\sin(2\pi t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Reprenons le procédé ci dessus : découpage et intégrations par parties. Les termes intégrés en cosinus ne s'annulent plus toujours aux bornes entières et on obtient cette fois :
$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{E(t)}{t^2}\sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{k}{2\pi}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) - \frac{k}{\pi}\int_k^{k+1}\frac{\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t}{t^3}$.
Or $k\left(\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}\right) = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{(k+1)^2}$.
On en déduit d'après le procédé de simplification diagonale et d'après une étude précédente sur les séries de Riemannn que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty} k\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$.

On obtient par conséquence, en recollant les segments : $\boxed{\gamma = \dfrac{7}{12} - \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{E(t)\cos(2\pi t)}{t^3}\,\mathrm{d}t.}$
Ce procédé se généralise en fait facilement, et ceci encore grâce à la formule établie plus haut reliant les sommes des séries de Riemann $\zeta(2n)$ aux nombres de Bernoulli β_{2n}.
Nous allons établir par récurrence la validité pour tout entier n de la formule (F_n) suivante :

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\beta_{2k}}{2k} - \frac{\beta_{2n}}{\zeta(2n)}\int_1^{+\infty}\frac{E(t)\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t}{t^{2n+1}}.}$$

- Les calculs précédents donnent la validité initiale pour n=1 car $\beta_2 = \dfrac{1}{6}$ et $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$
- Supposons (F_n) vraie et reprenons la technique de découpage amorcée précédemment.
  $I_k = \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t}{t^{2n+1}} = \frac{2n+1}{2\pi}\int_k^{k+1}\frac{\sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t}{t^{2n+2}}$.
  $I_k = \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t}{t^{2n+1}} = \frac{(2n+1)}{4\pi^2}\left(\frac{1}{k^{2n+2}} - \frac{1}{(k+1)^{2n+2}}\right) - \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2}\int_k^{k+1}\frac{\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t}{t^{2n+3}}$.
  Or comme précédemment : $a_k = k\left(\dfrac{1}{k^{2n+2}} - \dfrac{1}{(k+1)^{2n+2}}\right) = \dfrac{1}{k^{2n+1}} - \dfrac{1}{(k+1)^{2n+1}} + \dfrac{1}{(k+1)^{2n+2}}$.

  On en déduit $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty} a_k = \zeta(2n+2)$ et par suite, en recollant les segments d'intégration :

$$\int_1^{+\infty} \frac{E(t)\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t}{t^{2n+1}} = \frac{(2n+1)\zeta(2n+2)}{4\pi^2} - \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2}\int_1^{+\infty} \frac{E(t)\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t}{t^{2n+3}}$$

On a donc maintenant vu l'hypothèse de récurrence :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\beta_{2k}}{2k} - \frac{\beta_{2n}(2n+1)\zeta(2n+2)}{\zeta(2n)4\pi^2} + \frac{\beta_{2n}(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2\zeta(2n)}\int_1^{+\infty} \frac{E(t)\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t}{t^{2n+3}}.$$

Utilisons maintenant la formule $\beta_{2q} = \dfrac{(-1)^{q+1}2(2q)!\zeta(2q)}{(2\pi)^{2q}}$.

On en déduit immédiatement $\dfrac{\beta_{2(n+1)}}{\beta_{2n}} = \dfrac{-(2n+2)(2n+1)\zeta(2n+2)}{4\pi^2\zeta(2n)}$.

D'où la formule espérée au rang $n+1$: $\gamma = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{\beta_{2k}}{2k} - \frac{\beta_{2(n+1)}}{\zeta(2(n+1))}\int_1^{+\infty} \frac{E(t)\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t}{t^{2(n+1)+1}}$.

Ceci est un bon exemple d'approche d'une intégrale par l'intermédiaire d'une série divergente. En effet, bien que la somme $S_n = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\beta_{2k}}{2k}$ tende vers l'infini avec n, on pourra approcher γ en choisissant un entier n assez grand, ce qui permet d'évaluer l'intégrale restante avec une bonne précision au vu de la puissance intervenant au dénominateur.

¬ **La formule d'Hermite.** Nous sommes partis d'une identité classique et en avons déduit trois expressions originales de la constante d'Euler. Pour terminer nous allons montrer que l'on peut revenir à une formule bien connue, celle dite d'Hermite s'écrivant : $\gamma = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+\pi^2)(\mathrm{e}^{2x}-1)}$.

On part de $\gamma = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\overleftrightarrow{(x+1)\cos(\pi x)}\,\mathrm{d}x}{x+1}$.

On sait expliciter facilement la transformée de Laplace $F(p)$ d'une fonction f de période T.

On obtient en effet par utilisation d'un découpage en segments de longueur T et par emploi d'une simple série géométrique, la formule : $F(p) = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\displaystyle\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.

Appliquée au numérateur de notre intégrale, elle donne :

$$F(p) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2p}}\left(\int_0^1 (x+1)\cos(\pi x)\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\cos(\pi x)\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x\right).$$

En passant aux exponentielles complexes, les intégrales s'écrivent comme parties réelles de :

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^{(i\pi-p)x}\,\mathrm{d}x$ et $I_2 = \displaystyle\int_1^2 (x-1)\mathrm{e}^{(i\pi-p)x}\,\mathrm{d}x$.

En intégrant par parties on obtient alors : $I_1 = \dfrac{-2\mathrm{e}^{-p}-1}{i\pi-p} + \dfrac{\mathrm{e}^{-p}+1}{(i\pi-p)^2}$ et $I_2 = \dfrac{\mathrm{e}^{-2p}}{i\pi-p} - \dfrac{\mathrm{e}^{-p}+\mathrm{e}^{-2p}}{(i\pi-p)^2}$.

La partie réelle de $I_1 + I_2$ est donc : $(1-\mathrm{e}^{-2p})\dfrac{(p^2-\pi^2)}{(p^2+\pi^2)^2} + \dfrac{p}{p^2+\pi^2}(2\mathrm{e}^{-p}+1-\mathrm{e}^{-2p})$.

On en déduit pour la transformée F : $F(p) = \dfrac{p^2-\pi^2}{(p^2+\pi^2)^2} + \dfrac{p}{p^2+\pi^2} + \dfrac{p}{p^2+\pi^2}\dfrac{2\mathrm{e}^{-p}}{1-\mathrm{e}^{-2p}}$.

Posons alors pour tout $p \geqslant 0$: $G(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\overleftrightarrow{(x+1)\cos(\pi x)}}{x+1}\mathrm{e}^{-p(x+1)}\,\mathrm{d}x$.

G est dérivable sur $]0,+\infty[$ suivant :

$$G'(p) = -\int_0^{+\infty} \overleftrightarrow{(x+1)\cos(\pi x)}\mathrm{e}^{-p(x+1)}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-p}F(p).$$

Comme G tend vers 0 à l'infini, il vient : $G(p) = \displaystyle\int_p^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}F(x)\,\mathrm{d}x$, soit d'après l'étude de F :

$$G(p) = \int_p^{+\infty} \frac{x^2-\pi^2}{(x^2+\pi^2)^2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_p^{+\infty} \frac{x}{x^2+\pi^2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_p^{+\infty} \frac{2x\mathrm{e}^{-2x}}{(x^2+\pi^2)(1-\mathrm{e}^{-2x})}\,\mathrm{d}x.$$

Lorsque p tend vers 0, on obtient la limite à droite de G en ce point, soit :

$$G(0^+) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2-\pi^2}{(x^2+\pi^2)^2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+\pi^2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{2x\mathrm{e}^{-2x}}{(x^2+\pi^2)(1-\mathrm{e}^{-2x})}\,\mathrm{d}x.$$

On remarque alors que $\left(\dfrac{x}{x^2+\pi^2}\right)' = \dfrac{\pi^2-x^2}{(x^2+\pi^2)^2}$. En intégrant par parties la somme des deux premières intégrales s'annule, et il nous reste : $G(0^+) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x\mathrm{e}^{-2x}}{(x^2+\pi^2)(1-\mathrm{e}^{-2x})}\,\mathrm{d}x$.

Il nous reste, pour obtenir enfin la formule annoncée : $\gamma = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+\pi^2)(\mathrm{e}^{2x}-1)}$, à justifier la continuité de G en 0. On peut par exemple procéder comme suit :

Pour $a>0$ fixé d'abord arbitrairement écrivons :

$$G(0)-G(p) = \int_0^a \frac{\overleftrightarrow{(x+1)\cos(\pi x)}}{x+1}(1-\mathrm{e}^{-p(x+1)})\,\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} \frac{\overleftrightarrow{(x+1)\cos(\pi x)}}{x+1}(1-\mathrm{e}^{-p(x+1)})\,\mathrm{d}x.$$

Pour la première intégrale, la convergence vers 0 pour a fixé lorsque p tend vers 0 en décroissant s'obtient simplement avec le théorème de Dini.

En effet la suite de fonctions continues $n \longmapsto f_n(x) = \left|\dfrac{\overleftrightarrow{(x+1)\cos(\pi x)}}{x+1}\right|\left(1-\mathrm{e}^{-\dfrac{(x+1)}{n}}\right)$ converge simplement vers 0 en décroissant sur le compact $[0,a]$ donc converge uniformément.

La deuxième intégrale se décompose en $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\overleftrightarrow{(x+1)\cos(\pi x)}}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} \frac{\overleftrightarrow{(x+1)\cos(\pi x)}}{x+1}\mathrm{e}^{-p(x+1)}\,\mathrm{d}x$.

Le premier terme, vu la convergence de l'intégrale sur $[0,+\infty[$, pourra toujours être rendu aussi petit que l'on veut en valeur absolue à condition de choisir a suffisamment grand.

Pour $\epsilon>0$ donné il existe *M* positif tel que $b>a>M \Rightarrow \left|\displaystyle\int_a^b \frac{\overleftrightarrow{(x+1)\cos(\pi x)}}{x+1}\,\mathrm{d}x\right| < \epsilon$.

Pour le dernier terme, il nous faut un outil un peu plus sophistiqué, la deuxième formule de la moyenne. Rappelons ce résultat : Si f désigne une fonction à valeurs réelles décroissante sur $[a,b]$ et si g est intégrable sur ce même intervalle, il existe alors un réel c de $[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Appliqué ici, il donne :

$$J(a,b,p) = \int_a^b \frac{\overleftrightarrow{(x+1)\cos(\pi x)}}{x+1}\mathrm{e}^{-p(x+1)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-p(a+1)}\int_a^c \frac{\overleftrightarrow{(x+1)\cos(\pi x)}}{x+1}\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{-p(b+1)}\int_c^b \frac{\overleftrightarrow{(x+1)\cos(\pi x)}}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

En valeur absolue on aura donc pour $b>a>M$: $|J(a,b,p)| \leqslant 2\epsilon$, ce qui nous suffit.