MYSTERIEUX TRIANGLE DE LEIBNIZ.

« *L'harmonie invisible vaut mieux que celle qui est visible.....* »

Héraclite.

Accro au produit scalaire.

Fin Juin 2007. Malgré tous mes efforts je n'arrive pas à décrocher de ces calculs qui m'obsèdent. Je continue donc à faire fonctionner ma formule de réduction sur des exemples divers en espérant que va surgir encore quelque belle vérité. Tiens, je n'avais pas pensé à utiliser la fonction génératrice des polynômes orthogonaux pour évaluer les coefficients de Fourier. Bon cela donne quelques formules marrantes, sans plus… J'ai toujours mon vieux cahier à couverture rouge où j'avais listé il y a vingt ans bon nombre de fonctions décomposées dans la base des polynômes de Laguerre. Il y avait une par exemple faisant intervenir la fonction de Bessel : $e^q J_0(2\sqrt{qx}) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q^n}{n!} L_n(x)$.

Il en sort une formule tout aussi bizarre : $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{s_n}{n!} q^n = e^q \sum (-1)^{n+1} \frac{s_n}{n!} q^n$, qui me lance sur la piste de la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{s_n}{n!} x^n$ que je baptise naturellement 'fonction exponentielle harmonique de Leibniz' en référence aux coefficients $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k}$ sommes des lignes du triangle étudié par cet illustre maître.

A partir de là je vais de surprise en surprise et apparaît de plus en plus criante une dualité profonde entre les nombres harmoniques classiques $H_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ et les nombres $G_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{k}$ dont j'ignore s'ils ont une appellation normalisée et que je nommerais ici nombres 'géoharmoniques'.

J'obtiens donc de 'belles formules' dont je ne sais si elles sont connues à ce jour. Je suis cependant étonné de voir que l'encyclopédie en ligne des suites entières ne fait pas mention d'un lien évident entre les deux suites répertoriées s_n et G_n.

Si je vous ai un peu intrigué prenez donc le chemin un peu tortueux qui m'a conduit vers de singulières égalités. (L'essentiel du dénouement débute en fait au paragraphe 3). Je suis certain que vous ne regretterez pas vos efforts.

MYSTERIEUX TRIANGLE DE LEIBNIZ.

1. Utilisation des fonctions génératrices.

La connaissance conjointe d'une fonction génératrice pour les polynômes d'une suite orthonormale $n \mapsto P_n$ pour la densité ρ et des coefficients de Fourier de la réductrice de ρ par rapport à celle-ci permet d'obtenir quelques formules intéressantes.

En effet de $G(x,t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda_n P_n(x) t^n$, valable sur un voisinage de l'origine, on déduit :

$\int_I \varphi(x) G(x,t) \rho(x) dx = \sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda_n C_n(\varphi) t^n$ (F). Voici quelques applications numériques.

1.1. Pour la mesure de Gauss $\rho(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que la réductrice est définie par $\varphi(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \ln|x-t| e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.

Les polynômes d'Hermite sont donnés par la fonction génératrice :

$$G(x,t) = e^{\sqrt{2}xt - t^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} H_n(x)(-1)^n \sqrt{\frac{2^n}{n!}} \times t^n .$$

Les coefficients de Fourier de φ sont explicités par : $C_{2n+1}(\varphi) = (-1)^{n+1} \dfrac{n!}{\sqrt{(2n+1)!}}$ pour un indice impair et sont nuls pour un rang pair.

L'application de la formule (F) nous donne alors :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-(\frac{x}{\sqrt{2}} - t)^2} dx = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^{n+1} n! \frac{(\sqrt{2}.t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = i\sqrt{\pi} \times erf(\frac{it}{\sqrt{2}}) \times e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

Le programme MAPLE ci-dessous confirme numériquement.

```
> phig:=proc(x)
local t,s;
s:=evalf(int(t*ln(abs(x-t))*exp(-t*t/2),t=-
infinity..infinity));end;
```

$phig := \mathbf{proc}(x)$
local $t, s;$
$s := \text{evalf}(\text{int}(t \times \ln(\text{abs}(x-t)) \times \exp(-1/2 \times t\hat{}2), t = -\infty .. \infty))$
end proc

```
> sumo:=proc(t)
local k,s;
s:=0;for k from 0 to 200 do s:=s+evalf(phig(-10+k/10)*exp(-(t-(-10+k/10)/sqrt(2))^2));od;s:=evalf(s/(10*Pi));end;
```

sumo := **proc**(*t*)
local *k*, *s*;
s := 0;
for *k* **from** 0 **to** 200 **do**
$s := s + \text{evalf}(\text{phig}(-10 + 1/10\times k)\times\exp(-(t - (-10 + 1/10\times k)/\text{sqrt}(2))\text{^}2))$
end do ;
$s := \text{evalf}(1/10\times s/\pi)$
end proc

```
> gof:=proc(t)
local n,s;
s:=0;for n from 0 to 30 do s:=evalf(s+(-1)^(n+1)*n!*(sqrt(2)*t)^(2*n+1)/(2*n+1)!);od;end;
```

gof := **proc**(*t*)
local *n*, *s*;
s := 0;
for *n* **from** 0 **to** 30 **do**
$s := \text{evalf}(s + (\text{-}1)\text{^}(n+1)\times n!\times(\text{sqrt}(2)\times t)\text{^}(2\times n+1)/(2\times n+1)!)$
end do
end proc

```
> foc:=proc(t)
local s,n;
s:=sum((-1)^(n+1)*n!*(sqrt(2)*t)^(2*n+1)/(2*n+1)!,n=0..infinity);end;
```

foc := **proc**(*t*)
local *s*, *n*;
$s := \text{sum}((\text{-}1)\text{^}(n+1)\times n!\times(\text{sqrt}(2)\times t)\text{^}(2\times n+1)/(2\times n+1)!,\ n = 0\ ..\ \infty)$
end proc

```
> simplify(foc(t));
```

$$-I\sqrt{\pi}\left(-1+\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{-t^2}}{2}\right)\right)\operatorname{csgn}(t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t^2}{2}\right)}$$

```
> z:=t->sqrt(Pi)*erf(t*I/sqrt(2))*exp(-t*t/2)*I;
```

$$z := t \to \sqrt{\pi}\operatorname{erf}\left(\frac{t\,I}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{e}^{(-1/2\,t^2)}\,I$$

```
> evalf(z(0.3));
```
-0.4117623327

```
> evalf(foc(0.3));
```
-0.4117623329 – 0. *I*

```
> sumo(0.3);
```
-0.4117623318

```
> evalf(z(0.7));
```
-0.8430521273

```
> evalf(foc(0.7));
```
-0.8430521272 – 0. *I*

```
> sumo(0.7);
```
-0.8430521268

```
>
```

1.2. Pour la densité $\rho(x)=e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$. La réductrice est $\varphi(x)=-2e^{-x}[Ei(1,-x)+i\pi]$.

Les polynômes de Laguerre définis par $L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})=\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k(-1)^k\frac{x^k}{k!}$ peuvent être générés par : $G(x,t)=\frac{e^{\frac{-xt}{1-t}}}{1-t}=\sum_{n=0}^{n=\infty} L_n(x)t^n$. Les coefficients de Fourier de φ par rapport à ce système sont donnés par : $C_n(\varphi)=-s_n=-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{C_{n-1}^k}$.

L'application de la formule (F) nous donne ici : Pour $0<p\le 2$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\varphi(x)e^{-px}dx=\int_0^1\int_0^1\frac{s^{p-1}-t^{p-1}}{\ln(t)-\ln(s)}dtds=\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n s_n(p-1)^n}$$

1.3. Pour la mesure de Lebesgue de densité constante $\rho(x)=1$ sur [0, 1], la réductrice est définie par $\varphi(x)=2\ln(\frac{x}{1-x})$.

Les polynômes de Legendre sont obtenus par : $P_n(x)=\frac{\sqrt{2n+1}}{n!}\frac{d^{(n)}}{dx^n}(x^n(1-x)^n)$ mais peuvent être aussi générés par $G(x,t)=\frac{1}{\sqrt{(1-2t)^2+8tx}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2^n}{\sqrt{2n+1}}P_n(x)\times t^n$

Les coefficients de Fourier de φ par rapport à ce système orthonormal sont nuls pour un indice pair et pour un rang impair sont donnés par $C_{2n+1}(\varphi)=\frac{-2\sqrt{4n+3}}{(2n+1)(n+1)}$

Après simplifications et calculs annexes, la formule (F) se traduit alors ici : Pour $|t|<\frac{1}{2}$

$$\boxed{\int_0^1\frac{\ln(\frac{1-x}{x})dx}{\sqrt{(1-2t)^2+8tx}}=\frac{\ln(1-4t^2)}{2t}+\ln\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right|=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(2t)^{2n+1}}{(2n+1)(n+1)}} \quad \text{(Eg)}$$

```
> phig:=proc(t)
local x,s;
s:=evalf(int(ln((1-x)/x)/((1-2*t)^2+8*t*x)^(1/2),x=0..1));end;
```

$phig := \mathbf{proc}(t)$

local $x, s;$

$s := \text{evalf}(\text{int}(\ln((1-x)/x)/((1-2\times t)^\wedge 2+8\times t\times x)^\wedge(1/2), x=0..1))$

end proc

```
> sumo:=proc(t)
local n,s;
s:=evalf(sum((2*t)^(2*n+1)/((2*n+1)*(n+1)),n=0..infinity));end
;
```

$sumo := \mathbf{proc}(t)$

local $n, s;$

$s := \text{evalf}(\text{sum}((2\times t)^\wedge(2\times n+1)/((2\times n+1)\times(n+1)), n=0..\infty))$

end proc

```
> z:=t->ln(1-4*t*t)/(2*t)+ln(abs((1+2*t)/(1-2*t)));
```

$$z := t \to \frac{1}{2}\frac{\ln(1-4\,t^2)}{t} + \ln\left(\left|\frac{2\,t+1}{1-2\,t}\right|\right)$$

```
> evalf(z(0.12345));
```
0.2494717308
```
> evalf(phig(0.12345));
```
0.2494717311
```
> sumo(0.12345);
```
0.2494717311

Remarquons qu'en intégrant (Eg) par rapport à t sur l'intervalle $[0,\frac{1}{2}]$, on obtient par Fubini l'expression : $\boxed{\int_0^1 \ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}})\ln(\frac{1}{x}-1)dx = 2\ln(2) - \frac{\pi^2}{12}}$

```
> u:=int(((1-2*t)^2+8*t*x)^(-1/2),t);
```

$$u := \frac{1}{4}\ln\left(\frac{(-2+4\,x+4\,t)\sqrt{4}}{4} + \sqrt{1+4\,t^2+(-4+8\,x)\,t}\right)\sqrt{4}$$

```
> f:=subs(t=1/2,u)-subs(t=0,u);
```

$$f := \frac{1}{4}\ln(x\sqrt{4}+\sqrt{4}\sqrt{x})\sqrt{4} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{(4\,x-2)\sqrt{4}}{4}+1\right)\sqrt{4}$$

```
> f:=simplify(f);
```

$$f := \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\ln(x)$$

```
> w:=int(ln(1-4*t^2)/(2*t)+ln((1+2*t)/(1-2*t)),t=0..1/2);
```

$$w := -\frac{\pi^2}{24} + \ln(2)$$

```
> ww:=int((1/2)*ln(1+1/sqrt(x))*ln(1/x-1),x=0..1);
```

$$ww := \int_0^1 \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\ln\left(\frac{1}{x}-1\right)dx$$

```
> evalf(ww);
```
0.2819136638
```
evalf(w);
```
0.2819136637

En intégrant par rapport à t quelconque on généralise facilement. Toujours pour $|t| < \frac{1}{2}$

$\boxed{\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(2t)^{2n+2}}{(2n+1)(n+1)^2} = \left(\frac{\ln(2t)+1}{4}\right)\ln(1-4t^2) + \frac{1}{4}(di\log(4t^2) - \frac{\pi^2}{6}) + t\ln\left(\frac{1+2t}{1-2t}\right)}$ et est égal à :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (-\ln(-1+2\,x+2\,t+\sqrt{1-4\,t+4\,t^2+8\,t\,x}) + \ln(2) + \ln(x))\,(\ln(x) - \ln(1-x))\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t)\ln(-(2\,t-1)\,(1+2\,t)) + \frac{1}{2}\ln(2)\ln(2\,t-1) + \frac{1}{2}\ln(1+2\,t)\ln(2) - \frac{\pi^2}{24}$$
$$+ \frac{1}{4}\mathrm{dilog}(4\,t^2) - \ln\left(-\frac{1}{2\,t-1}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1+2\,t}{2\,t-1}\right) + \ln\left(-\frac{1+2\,t}{2\,t-1}\right)t - \frac{1}{2}I\ln(2)\,\pi$$

Pour $t=\dfrac{1}{\sqrt{8}}$ on obtient une somme de série classique :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{2^n(2n+1)(n+1)^2}=\sqrt{8}\ln(3+2\sqrt{2})-4\ln(2)+(\ln(2))^2-\frac{\pi^2}{6}}$$

2. Autres exemples de calculs de coefficients de Fourier.

2.1. Densités de Laguerre associées.

Rappelons que ces densités sont définies sur $]0,+\infty[$ par $\rho(x)=\dfrac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}$ avec $\alpha>-1$.

Les moments de ρ sont égaux à : $c_n=\dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}=\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}(\alpha+k)$

La réductrice est donnée par :

$$\boxed{\varphi(x)=2x^\alpha e^{-x}[\int_0^x t^{-\alpha-1}e^t dt-\cos(\alpha\pi)\Gamma(-\alpha)]=\frac{2x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}(\alpha-tx)e^{-tx}\ln|1-t|dt}$$

Un système orthonormal est donné par les polynômes dits de Laguerre associés, définis par :

$$P_n(x)=\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+1)}{n!}}\times\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k(-1)^k\frac{x^k}{\Gamma(\alpha+k+1)}$$

On en déduit les polynômes secondaires, définis grâce aux moments de la densité, par :

$$Q_n(x)=\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+1)}{n!}}\times\sum_{k=1}^{k=n}\frac{C_n^k(-1)^k}{\Gamma(\alpha+k+1)}\sum_{q=0}^{q=k-1}c_{k-1-q}x^q$$

Il suffit alors d'écrire : $C_n(\varphi)=<\varphi/P_n>_\rho=<1/Q_n>_\rho$. Après simplifications on obtient :

$$C_n(\varphi)=\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+1)}{n!}}\times\frac{1}{[\Gamma(\alpha+1)]^2}\times\sum_{k=1}^{k=n}C_n^k(-1)^k(\sum_{q=0}^{q=k-1}\frac{\Gamma(\alpha+k-q)\Gamma(\alpha+q+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)})$$

Par exemple pour $\alpha=1$ on obtient $C_n(\varphi)=\sqrt{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}C_n^k(-1)^k(\sum_{q=0}^{q=k-1}\frac{1}{C_{k+1}^{q+1}})$. Le calcul du carré de la norme de φ donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}(n+1)[\sum_{\substack{1\le k\le n\\0\le q\le k-1}}(-1)^k\frac{C_n^k}{C_{k+1}^{q+1}}]^2=\frac{8\pi^2}{81}$

2.2. Mesures de Jacobi.

On considère la densité $\rho(x)=(a+1)x^a$ sur [0, 1]. (avec $a>-1$).

La réductrice est définie par $\varphi(x)=2(a+1)[\frac{\pi}{\tan(a\pi)}x^a+\mathrm{LerchPhi}(x,1,-a)]$.

On obtient directement un système orthogonal par la formule de Rodrigues, soit

$x^{-a}\frac{d^{(n)}}{dx^n}(x^{a+n}(1-x)^n)=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k C_n^k\frac{\Gamma(a+n+k+1)}{\Gamma(a+1-k)}x^k$. Si on les norme, il vient :

$$P_n(x)=\frac{\sqrt{a+2n+1}}{n!\sqrt{a+1}}\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k C_n^k\frac{\Gamma(a+n+k+1)}{\Gamma(a+k+1)}x^k .$$

Les moments de ρ étant égaux à $c_n=\frac{a+1}{a+1+n}$, on en déduit les polynômes secondaires pour ρ, soit $Q_n(x)=\frac{\sqrt{a+2n+1}}{n!\sqrt{a+1}}\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k C_n^k\frac{\Gamma(a+n+k+1)}{\Gamma(a+k+1)}\sum_{q=0}^{q=k-1}c_{k-q-1}x^q$;

Ceci nous donne enfin les coefficients de φ par rapport aux P_n, par :

$C_n(\varphi)=<\varphi/P_n>_\rho=<1/Q_n>_\rho$. Après simplifications on arrive à :

$$C_n(\varphi)=\frac{(a+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{a+2n+1}}{n!}\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k C_n^k\frac{\Gamma(a+n+k+1)}{\Gamma(a+k+1)}\sum_{q=0}^{q=k-1}\frac{1}{(a+1+q)(a+k-q)}$$

Dans le cas particulier de la mesure de Lebesgue (a =0), on obtient une écriture condensée où apparaissent les nombres harmoniques $H_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$;

Plus précisément : $C_n(\varphi)=2\sqrt{2n+1}\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k C_n^k C_{n+k}^n\frac{H_k}{k+1}$ .En comparant avec l'expression obtenue dans ce cas particulier au chapitre 4, soit : $C_n(\varphi)=\begin{cases}0 \text{ si } n \text{ est pair}\\ -\frac{4\sqrt{2n+1}}{n(n+1)} \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}$

on retrouve une relation entre les nombres harmoniques et les coefficients du binôme que l'on avait obtenu à l'époque par la formule de covariance.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k C_n^k C_{n+k}^n\frac{H_k}{k+1}=\begin{cases}0\ si\ n\ pair\\ \frac{-2}{n(n+1)}\ si\ n\ impair\end{cases}}$$

2.3. Mesure de Lebesgue.

Rappelons que les coefficients de Fourier d(ordre impair d'une fonction *f* par rapport aux système des polynômes de Legendre se calculent :

$$c_{2n+1}(f) = -\frac{\sqrt{4n+3}}{(2n+1)!}\int_0^1 f^{(2n+1)}(x)[x(1-x)]^{2n+1}dx$$

On en déduit par produit scalaire et application de la mesure de réduction :

$$<\varphi/f>=<\frac{\rho}{\mu}/T(f)>_\mu = \int_0^1\int_0^1 \frac{f(y)-f(x)}{y-x}dxdy = -2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\sqrt{4n+3}}{(2n+1)(n+1)}c_{2n+1}(f)$$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{f(y)-f(x)}{y-x}dxdy = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{4n+3}{(2n+1)!(2n+1)(n+1)}\int_0^1 f^{(2n+1)}(x)[x(1-x)]^{2n+1}dx \quad \text{(Form)}$$

On a déjà fait fonctionner au chapitre 4 cette formule pour $f(x)=x^\alpha$, et obtenu des résultats numériques intéressants. Voici une autre application.

Pour $f(x)=e^x$. En décomposant l'exponentielle en série entière et par application des intégrales Eulériennes on obtient avec MAPLE :

$\int_0^1 e^x x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}dx = (2n+1)!\sqrt{e.\pi}.BesselI(2n+\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ avec la fonction de Bessel modifiée de premier ordre définie par $BesselI(\nu,x) = (\frac{x}{2})^\nu \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k} = (-i)^\nu J_\nu(ix)$

On en déduit par application de (Form) :

$$\boxed{\int_0^1\int_0^1 \frac{e^y-e^x}{y-x}dxdy = 2\sqrt{e\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{4n+3}{(n+1)(2n+1)}BesselI(2n+\frac{3}{2},\frac{1}{2})}$$

Or cette intégrale peut s'évaluer plus facilement en décomposant directement l'exponentielle en série entière. On a alors l'égalité des deux séries :

$$\boxed{\sqrt{e\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{4n+3}{(n+1)(2n+1)}BesselI(2n+\frac{3}{2},\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n}{(n+1)!}}$$

Grâce à la décomposition de la fonction de Bessel en série entière on peut se ramener à une série double ce qui nous donne enfin :

$$\boxed{\sqrt{e}\times\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(8n+6)(2n+k+2)!}{k!(n+1)(2n+1)4^k(4n+2k+4)!} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n}{(n+1)!}}$$

Voici l'étude MAPLE.

```
> C[n]:=int(x^n*x^p*(1-x)^p,x=0..1);
```

$$C_n := \frac{\Gamma(p\sim+1)\,\Gamma(n+p\sim+1)}{\Gamma(2+n+2\,p\sim)}$$

```
> sum(C[n]/n!,n=0..infinity);
```

$$\frac{4\,\Gamma(p\sim+1)\,\mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{2}+p\sim,\frac{1}{2}\right)4^{(1/2+p\sim)}\,\mathbf{e}^{(1/2)}\sqrt{\pi}}{2^{(3+2\,p\sim)}}$$

```
> g:=Doubleint((exp(y)-exp(x))/(y-x),x=0..1,y=0..1);
```

$$g := \int_0^1\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^y-\mathbf{e}^x}{y-x}\,dx\,dy$$

```
> evalf(g);
```

$1.694960128+0.\,I$

```
s:=sum((4*n+3)*BesselI(2*n+3/2,1/2)/((n+1)*(2*n+1)),n=0..infinity);
```

$$s := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4\,n+3)\,\mathrm{BesselI}\left(2\,n+\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}{(n+1)\,(2\,n+1)}$$

```
> evalf(2*sqrt(Pi*exp(1))*s);
```

1.694960128

```
>
> g:=(a,x)->(x/2)^a*sum((x/2)^(2*n)/(n!*GAMMA(a+n+1)),n=0..infinity);
```

$$g := (a,x) \to \left(\frac{1}{2}x\right)^a\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{(2\,n)}}{n!\,\Gamma(a+n+1)}\right)$$

```
s1:=sum((4*n+3)*g(2*n+3/2,1/2)/((n+1)*(2*n+1)),n=0..infinity);
```

$$s1 := \frac{1}{288}\sqrt{4}\,\mathrm{hypergeom}\left([\ ],\left[\frac{5}{6},\frac{7}{6},\frac{3}{2}\right],\frac{1}{432}\right)\left(72\,\mathrm{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2},1,1\right],\left[\frac{3}{2},2\right],\frac{1}{16}\right)+\mathrm{hypergeom}\left(\left[\frac{3}{2},2,2\right],\left[\frac{5}{2},3\right],\frac{1}{16}\right)\right)\Big/\sqrt{\pi}$$

```
> evalf(2*sqrt(Pi*exp(1))*s1);
```

1.693127827

```
> v:=sum(harmonic(n)/(n+1)!,n=1..infinity);
```

$$v := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{harmonic}(n)}{(n+1)!}$$

```
> evalf(2*v);
```

1.694960128

```
> L:=proc()
> local n,k,s;
> s:=0; for n from 0 to 20 do for k from 0 to 20 do
s:=s+(4*n+3)*(2*n+k+2)!/(k!*(n+1)*(2*n+1)*4^k*(4*n+2*k+4)!);od
;od;s:=evalf(4*s*sqrt(exp(1)));end;

> L();
```

1.694960127

3. Coefficients de Fourier des séries entières.

3.1. Formule de dualité scalaire

Rappelons que pour une mesure réductible ρ de réductrice associée φ on peut écrire l'égalité fondamentale : $< f/\varphi >_\rho = < T_\rho(f)/1 >_\rho = \iint_{I\times I} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\rho(x)\rho(y)dxdy$

Lorsque *f* est une série entière, on peut évaluer cette intégrale double directement à partir des coefficients de *f* comme on l'a fait dans des exemples précédents. En généralisant cela donne :

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n(f)z^n$, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n(f) \sum_{k=0}^{k=n-1} x^k y^{n-1-k}$.

Ainsi, sous réserve de vérifier correctement la commutation de l'intégrale et la somme infinie, on pourra écrire $\iint_{I\times I} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\rho(x)\rho(y)dxdy = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n(f)\sigma_n$ avec σ_n moment d'ordre *n* de la réductrice obtenue à partir des moments de ρ par $\sigma_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_k c_{n-1-k}$ .. Or en utilisant les coefficients de Fourier respectifs de *f* et φ relativement à un système orthonormé P_n de polynômes, la formule de réduction se traduit alors par l'égalité dite de dualité :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty} C_n(\varphi)C_n(f) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sigma_n a_n(f)} \text{ (duale)}$$

Examinons quelques applications de cette relation sur les densités les plus classiques.
Commençons par la densité $\rho(x) = e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$ dont un système orthonormé classique est celui des polynômes de Laguerre $L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^k \frac{x^k}{k!}$
La réductrice est $\varphi(x) = -2e^{-x}[Ei(1,-x) + i\pi]$

Les coefficients de Fourier de φ par rapport à ce système sont donnés par :
$C_n(\varphi) = -s_n = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k}$. Le calcul des moments d'ordre *n* de φ est très facile :

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_k c_{n-1-k} = \sum_{k=0}^{k=n-1} k!(n-1-k)! = (n-1)!\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k} = n!s_n \ .$$

La formule de dualité s'écrit alors simplement ici : $\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty} s_n f^{(n)}(0) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} s_n C_n(f)}$

3.2. Exemples d'applications.

Etudions quelques séries que l'on sait décomposer dans la base des polynômes de Laguerre.

- Pour $f(x)=L_j$. $f^{(n)}(0)=C_j^n(-1)^n$ pour $n\leq j$. On obtient alors :

  $s_j=\sum_{n=1}^{n=j}(-1)^{n+1}C_j^n.s_n$. C'est la relation classique entre ces coefficients.

- Pour $f(x)=e^{-\alpha x}$ avec $\alpha\geq 0$ .On sait que $e^{-\alpha x}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}}L_n(x)$ et $f^{(n)}(0)=(-\alpha)^n$

On en déduit l'égalité : $\sum_{n=1}^{n=\infty}(-\alpha)^n s_n=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}}s_n$, déjà obtenue dans l'étude sur le bord gauche de la suite $n\mapsto s_n$.

- Pour $f(x)=e^qJ_0(2\sqrt{qx})$ avec J_0 fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 définie par : $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(x\sin(\theta))d\theta=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2^n n!)^2}$

On a facilement : $f(x)=e^q\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n q^n x^n}{(n!)^2}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{q^n}{n!}L_n(x)$.

L'égalité de dualité se traduit alors : $\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{s_n}{n!}q^n=e^q\sum(-1)^{n+1}\frac{s_n}{n!}q^n}$ (sur tout le plan complexe)

3.3. Sur une fonction extraite du triangle harmonique de Leibniz.

La formule précédente montre que la série entière $\boxed{x\mapsto exleib(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{s_n}{n!}x^n}$ que l'on pourrait appeler exponentielle harmonique de Leibniz en hommage à l'étude de cet illustre maître sur les nombres s_n satisfait à la belle équation fonctionnelle :

$\boxed{f(-x)=-e^{-x}f(x)}$ (E_q) . Sous forme d'intégrale double, et si , $x\geq 0$, on pourra écrire :

$$exleib(x)=-e^x\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{J_0(2\sqrt{tx})-J_0(2\sqrt{sx})}{t-s}e^{-(t+s)}dtds$$

```
> s:=proc(n)
local k, y;
y:=0;for k from 0 to n-1 do y:=y+1/binomial(n-
1,k)od;y:=y/n;end;
```

$s:=\mathbf{proc}(n)$
local k, y;
$y:=0$; **for** k **from** 0 **to** $n-1$ **do** $y:=y+1/\text{binomial}(n-1,k)$ **end do** ; $y:=y/n$
end proc

```
> int(BesselJ(0,2*sqrt(x))*exp(-p*x),x=0..infinity);
```

$$\frac{e^{\left(-\frac{1}{p}\right)}}{p}$$

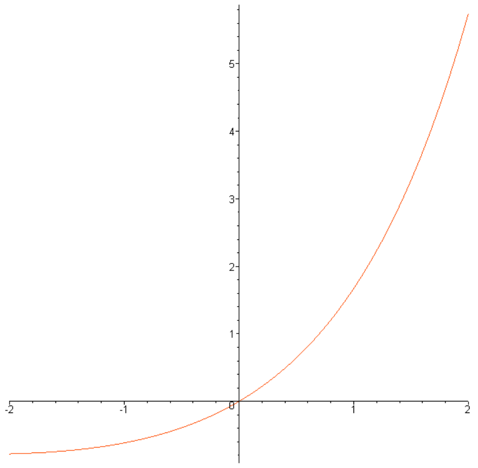
```
> f:=proc(x)
local y,k;y:=0;for k from 1 to 50 do
y:=evalf(y+x^k*s(k)/k!);od;end;
```

$f :=$ **proc**(x) **local** y, k; $y := 0$; **for** k **to** 50 **do** $y :=$ evalf$(y + x$^$k \times \mathrm{s}(k)/k!)$ **end do** **end proc**

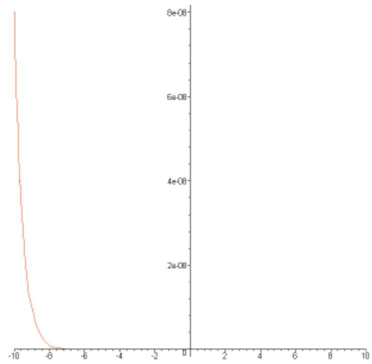
```
> g:=x->f(-x)+exp(-x)*f(x);
```

$$g := x \to \mathrm{f}(-x) + \mathbf{e}^{(-x)}\, \mathrm{f}(x)$$

```
> plot(f,-2..2);
```




```
> plot(g);
```



>

3.4. Exponentielle de Leibniz et sinus hyperbolique shifté.

L'équation $\boxed{f(-x) = -e^{-x} f(x)}$ (E_q) vérifiée par la fonction *exleib* suggère naturellement le changement de variable $exleib(x) = e^{\frac{x}{2}} \times u(x)$. La vérification de ($E_q$) se résume alors à remarquer que *u* est impaire.

Il est donc naturel de s'intéresser au développement en série de cette fonction *u*. Une rapide étude avec MAPLE et grâce à l'encyclopédie en ligne des suites entières suggère la formule :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)!(2n+1)}.$$

```
> s:=proc(n)
local k, y;
y:=0;for k from 0 to n-1 do y:=y+1/binomial(n-
1,k)od;y:=y/n;end;
```

$s := \mathbf{proc}(n)$

$\mathbf{local}\ k, y;$

$y := 0;\ \mathbf{for}\ k\ \mathbf{from}\ 0\ \mathbf{to}\ n-1\ \mathbf{do}\ y := y + 1/\mathrm{binomial}(n-1, k)\ \mathbf{end\ do};\ y := y/n$

$\mathbf{end\ proc}$

```
> exleib:=proc(x)
local y,k;y:=0;for k from 1 to 50 do
y:=(y+x^k*s(k)/k!);od;end;
```

$leib := \mathbf{proc}(x)\ \mathbf{local}\ y, k;\ y := 0;\ \mathbf{for}\ k\ \mathbf{to}\ 50\ \mathbf{do}\ y := y + x\text{^}k \times s(k)/k!\ \mathbf{end\ do}\ \mathbf{end\ proc}$

```
> u:=x->exleib(x)*exp(-x/2);
```

$$u := x \rightarrow \mathrm{leib}(x)\,\mathbf{e}^{(-1/2\,x)}$$

```
> v:=proc(x)
local k,y;y:=0;for k from 0 to 30 do
y:=y+x^(2*k+1)/(4^k*(2*k+1)!*(2*k+1));od;end;
```

$v := \mathbf{proc}(x)$

$\mathbf{local}\ k, y;$

$y := 0;$

$\mathbf{for}\ k\ \mathbf{from}\ 0\ \mathbf{to}\ 30\ \mathbf{do}\ y := y + x\text{^}(2\times k+1)/(4\text{^}k \times (2\times k+1)! \times (2\times k+1))\ \mathbf{end\ do}$

$\mathbf{end\ proc}$

```
> series(u(x),x=0,18);
```

$$x + \frac{1}{72}x^3 + \frac{1}{9600}x^5 + \frac{1}{2257920}x^7 + \frac{1}{836075520}x^9 + \frac{1}{449622835200}x^{11} + \frac{1}{331576403558400}x^{13} + \frac{1}{321374052679680000}x^{15} + \frac{1}{396275631890890752000}x^{17} + O(x^{18})$$

```
> series(v(x),x=0,18);
```

$$x + \frac{1}{72}x^3 + \frac{1}{9600}x^5 + \frac{1}{2257920}x^7 + \frac{1}{836075520}x^9 + \frac{1}{449622835200}x^{11} + \frac{1}{331576403558400}x^{13} + \frac{1}{321374052679680000}x^{15} + \frac{1}{396275631890890752000}x^{17} + O(x^{19})$$

Pour la vérification rigoureuse de ce qui semble bien une réalité on pourra se ramener à établir l'égalité : $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{s_n}{n!} x^n = \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{2^n n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n (2n+1)!(2n+1)}\right)$.

Après produit et simplification des termes, cela revient à montrer que les nombres de leibniz peuvent être explicités par la formule : $\boxed{s_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{k=E(\frac{n+1}{2})} \frac{C_n^{2k+1}}{2k+1}}$, ($E$ désignant la partie entière)

Je n'ai pas effectué directement cette vérification théorique et j'ai préféré me lancer dans les conséquences de cette égalité jusqu'à obtenir une formule qui elle peut se justifier facilement

Il est facile en effet d'expliciter la fonction *u*. par dérivation on obtient :

$$u'(x) = \frac{2}{x}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2}{x}sh(\frac{x}{2}) .$$

Comme *u* s'annule en 0 on peut alors écrire $u(x) = \int_0^x \frac{2}{t} sh(\frac{t}{2})dt$

La fonction exponentielle de Leibiz peut alors s'écrire en utilisant la fonction sinus hyperbolique shiftée notée classiquement : $Shi(x) = \int_0^x \frac{sh(t)}{t}dt$.

On obtient donc l'expression: $\boxed{exleib(x) = 2e^{\frac{x}{2}} Shi(\frac{x}{2})}$

Remarquons alors que vu son expression ci-dessus, la fonction *exleib* satisfait de manière évidente à l'équation différentielle : $x[2f'(x) - f(x)] = 2(e^x - 1)$ (E_d).

Traduite sur les coefficients du développement en série entière, on en tire immédiatement une génération simplifiée des termes s_n, soit : $s_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$ $s_n = \frac{1}{2}[s_{n-1} + \frac{2}{n}]$

Or cette relation se vérifie très facilement à partir de la définition initiale des nombres triangulaires de Leibniz, soit : $a_{(n,1)} = \frac{1}{n}; a_{(n,p)} = a_{(n-1,p-1)} - a_{(n,p-1)}; s_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_{(n,k)}$

Cela nous permet d'affirmer que *exleib* est bien solution de l'équation (E_d) donc est du type

$exleib(x) = 2e^{\frac{x}{2}} Shi(\frac{x}{2}) + \lambda e^{\frac{x}{2}}$. La condition d'annulation en 0 donne $\lambda = 0$. Nous en

déduisons aussi en retour la validité de la formule $s_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{k=E(\frac{n+1}{2})} \frac{C_n^{2k+1}}{2k+1}$.

3.5. Transformée de Laplace de la fonction exponentielle de Leibniz.

Reprenons la résolution de (E_d) par l'intermédiaire de la transformation de Laplace.

Si $F(p)$ désigne la transformée de $f(x)$, celle de $f'(x)$ sera $pF(p) - f(0) = pF(p)$ .La transformé de $xf'(x)$ est donc $-(pF(p))' = -(F(p) + pF'(p))$ et celle de $xf(x)$ est $-F'(p)$

La traduction de (E_d) s'écrit alors : $(1-2p)F'(p) - 2F(p) = 2(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p})$

On en déduit que la transformée de *exleib* est du type : $F(p)=\frac{2}{1-2p}\ln(1-\frac{1}{p})+\frac{\lambda}{1-2p}$, avec λ constante. Or rappelons nous que $exleib(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}s_n\frac{x^n}{n!}$; Sa transformée de Laplace peut donc s'obtenir plus directement par : $F(p)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{s_n}{p^{n+1}}$

De $\lim_{p\to+\infty}p^2F(p)=s_1=1$ on déduit alors que la constante λ est nulle. Ainsi on a l'égalité :

$$exleib\xrightarrow{Laplace}F(p)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{s_n}{p^{n+1}}=\frac{2}{1-2p}\ln(1-\frac{1}{p}).$$

3.6. Applications numériques diverses.

Rappelons qu'au chapitre 5 nous avions obtenu à partir de la formule de réduction appliquée à la fonction $x\mapsto e^{-\alpha x}$ l'égalité $\int_0^1\int_0^1\frac{y^z-x^z}{\ln(y)-\ln(x)}dxdy=\sum_{n=1}^{n=\infty}s_n(-1)^{n+1}z^n$. Pour $|z|<1$

Cette égalité est valable pour *z* voisin de l'origine, tout comme celle donnant *F*(*p*) l'est dans un voisinage de l'infini. La comparaison des deux séries entières nous donne alors l'égalité fondamentale : $\frac{-1}{p}\int_0^1\int_0^1\frac{y^{\frac{-1}{p}}-x^{\frac{-1}{p}}}{\ln(y)-\ln(x)}dxdy=\frac{2}{1-2p}\ln(1-\frac{1}{p})$

En posant $a=\frac{-1}{p}$ on obtient l'expression simplifiée : Pour $a>-1$

$$\boxed{\int_0^1\int_0^1\frac{y^a-x^a}{\ln(y)-\ln(x)}dxdy=\frac{2\ln(1+a)}{2+a}}$$

Cette intégrale peut en fait être calculée de manière élémentaire en passant en coordonnées polaires puis par les changements de variable successifs $\tan(\theta)=x$ puis $x=e^{-t}$. On se ramène alors à des intégrales classiques du type $\int_0^{+\infty}\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{t}dt=\ln(\beta)-\ln(\alpha)$

Remarquons aussi l'égalité : $\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty}s_nx^n=\frac{2\ln(1-x)}{x-2}}$ (FL) (Valable sur]-1, 1[ )

On retrouve en particulier ici la relation $2s_{n+1}-s_n=\frac{2}{n+1}$

Si on part maintenant de ce développement (FL) on peut poursuivre de manière classique et en déduire d'autres sommes de séries.

En divisant par *x* puis par intégration il apparaît suivant MAPLE :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{s_n}{n}x^n = di\log(1-x)+di\log(2-x)+\ln(1-x)\ln(2-x)+\frac{\pi^2}{12}}$$

Pour $x=1$: $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{s_n}{n}=\frac{\pi^2}{4}$. en effet $\lim_{x\to 1^-} di\log(1-x)+\ln(1-x)\ln(2-x)=\frac{\pi^2}{6}$

On pouvait en fait obtenir cette valeur à partir de $2s_n-\frac{2}{n}=s_{n-1}$ en élevant au carré et en utilisant le résultat antérieur $\sum_{n=1}^{n=\infty}s_n{}^2=\frac{4\pi^2}{9}$. Remarquer aussi que cette génération des s_n entraîne de manière évidente : $\lim_{n\to\infty}(s_1+s_2+......+s_n-2\ln(n))=2\gamma$

Pour $x=\frac{1}{2}$: $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{s_n}{n2^n}=di\log(\frac{3}{2})+\frac{\pi^2}{6}+\frac{(\ln(2))^2}{2}-\ln(2)\ln(3)$

Pour $x=-1$: $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n s_n}{n}=di\log(3)+\ln(2)\ln(3)$

Le calcul approché suggère que ces nombres sont opposés. Une explication simple vient de ce qu'l'on a vu au chapitre 5 sur le bord gauche de la suite s_n. Il s'agît simplement de la formule d'Euler d'accélération d'une série entière alternée. On peut le retrouver d'une manière plus générale en appliquant la formule de dualité à la fonction *f* définie par :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{(\frac{q}{q-1})\frac{x}{1+t}}-1}{1+t}dt=\ln(1-q)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{n}L_n(x)$$

Puisque $f^{(n)}(0)=\left(\frac{q}{q-1}\right)^n\times\frac{1}{n}$, la formule de dualité nous donne alors la relation :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{q}{q-1}\right)^n s_n=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{n}s_n}\quad(\text{Pour } -1\le q<1\ )$$

Remarquons la formule pratique : $di\log(3)=-\ln(2)\ln(3)-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{s_n}{n2^n}$

Sur la fonction de Bessel J_0.

Rappelons nous que le début de notre étude concernait la fonction de Bessel J_0 qui nous avait donné une première expression intégrale de la fonction '*exleib*'. En la reprenant il vient naturellement :

$$\boxed{-e^{-x}\times exleib(x)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{J_0(2\sqrt{tx})-J_0(2\sqrt{sx})}{t-s}e^{-(t+s)}dtds=-2e^{\frac{-x}{2}}Shi(\frac{x}{2})}$$

Transformée de Laplace de la réductrice.

Rappelons la décomposition $\varphi(x) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} s_n L_n(x)$

La transformée de Laplace du polynôme de Laguerre L_n étant $\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n$, celle de la réductrice sera : $\varphi(x) \xrightarrow{Laplace} G(p) = -\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{n=\infty} s_n (1-\frac{1}{p})^n = \frac{-2\ln(p)}{p+1}$ (ceci d'après (FL))

On en déduit vu l'expression de la réductrice à partir de l'exponentielle intégrale :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} [E_i(1,-x) + i\pi] e^{-(p+1)x} dx = \frac{\ln(p)}{p+1}}$$

4. Liens entre les coefficients s_n et les nombres harmoniques.

4.1. Expressions diverses des coefficients s_n.

Nous partons ici de la génération élémentaire obtenue plus haut :
$s_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$ $s_n = \frac{1}{2}[s_{n-1} + \frac{2}{n}]$. On en déduit facilement par récurrence pour $n \geq 1$ l'expression élégante : $\boxed{s_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{2^k}{k}}$, beaucoup plus agréable que la définition d'origine à partir des inverses des coefficients binomiaux, soit $\boxed{s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{C_{n-1}^k}}$

En introduisant le nombre harmonique d'ordre *n*, soit $H_n = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$ il est clair que l'on peut aussi écrire la formule : $\boxed{s_n = \frac{1}{2^n}[H_n + \int_1^2 \frac{1-x^n}{1-x}dx\ ]}$

Rappelons nous alors de l'étude sur le bord gauche de la suite s_n. On a obtenu dans le chapitre 5 la formule : $s_n = -\sum_{k=1}^{k=n} C_n^k (-1)^k s_k$

Remplaçons alors dans cette égalité chaque s_k par $\frac{1}{2^k}[H_k + \int_1^2 \frac{1-x^k}{1-x}dx\ ]$.

D'après la formule du binôme : $\sum_{k=1}^{k=n} C_n^k (-1)^k \int_1^2 \frac{1-x^k}{1-x}dx = \frac{1}{2^n}\int_1^2 \frac{1-(2-x)^n}{1-x}dx$

Or $\int_1^2 \frac{1-(2-x)^n}{1-x}dx = -\int_1^0 \frac{1-t^n}{t-1}dt = -H_n$.

On en déduit l'écriture de s_n à partir des nombres harmoniques : $\boxed{s_n = \frac{H_n}{2^n} - \sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k C_n^k \frac{H_k}{2^k}}$

Rappelons aussi celle obtenue un peu plus haut : $\boxed{s_n = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=E(\frac{n+1}{2})}\frac{C_n^{2k+1}}{2k+1}}$

4.2. Une formule intégrale sympathique.

Voici maintenant une formule intégrale amusante déduite des expressions de s_n précédentes et qui va nous permettre d'établir de belles relations entre les nombres harmoniques et les coefficients G_n et de faire apparaître naturellement bon nombre de relations classiques.

Nous supposons ici que *f* est une série entière sur le plan complexe : $f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$, de transformée de Laplace $F(p)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}}$.

D'après $s_n=\frac{1}{2^n}[H_n+\int_1^2\frac{1-x^n}{1-x}dx\,]$ on peut écrire :

$$S=\sum_{n=1}^{n=\infty} f^{(n)}(0)s_n=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{2^n}H_n+\int_1^2\frac{g(\frac{1}{2})-g(\frac{x}{2})}{1-x}dx \quad \text{avec } g(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty} f^{(n)}(0)x^n$$

On a donc avec les notations ci-dessus : $g(x)=\frac{1}{x}F(\frac{1}{x})-f(0)$

Ainsi : $\int_1^2\frac{g(\frac{1}{2})-g(\frac{x}{2})}{1-x}dx=2\int_1^2\frac{xF(2)-F(\frac{2}{x})}{x(1-x)}dx=2\int_1^2\frac{2F(2)-tF(t)}{t(t-2)}dt$. On en déduit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty} f^{(n)}(0)s_n=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{2^n}H_n+2\int_1^2\frac{2F(2)-tF(t)}{t(t-2)}dt}$$

Si on introduit la notation : $G_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{2^k}{k}$, on obtient la forme plus symétrique :

$$\boxed{2\int_1^2\frac{tF(t)-2F(2)}{t(t-2)}dt=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{2^n}[H_n-G_n]} \text{ (Sym)}$$

Remarquons que dans le cas particulier de cette densité $\rho(x)=e^{-x}$, la connaissance de la transformée de Laplace *F* de la série entière *f* permet de décomposer facilement celle-ci dans la base des polynômes de Laguerre. On sait en effet que $L_n(x)\xrightarrow{Laplace}\frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})^n$

Si $f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}C_n(f)L_n(x)$, on aura alors $pF(p)=\sum_{n=0}^{n=\infty}C_n(f)(1-\frac{1}{p})^n$. Si on pose $z=1-\frac{1}{p}$

On en déduit $G(z)=\frac{1}{1-z}F(\frac{1}{1-z})=\sum_{n=0}^{n=\infty}C_n(f)z^n$. Ainsi on obtient $C_n(f)=\frac{G^{(n)}(0)}{n!}$ et la formule de dualité prendra alors ici la forme :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty} f^{(n)}(0)s_n=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{G^{(n)}(0)}{n!}s_n}$$

4.3. Quelques applications numériques :

- Pour $f(x) = exleib(x)$ on a $f^{(n)}(0) = \frac{G_n}{2^n}$ et $F(t) = \frac{2}{1-2t}\ln(1-\frac{1}{t})$. On en déduit d'après (Sym) : $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{G_n(H_n - G_n)}{4^n} = \frac{4}{3}[di\log(\frac{3}{2}) - \ln(2)\ln(\frac{3}{2})] - \frac{2\pi^2}{9}$

Or on connaît $\frac{4\pi^2}{9} = \sum_{n=1}^{n=\infty} s_n{}^2 = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{G_n{}^2}{4^n}$, d'où : $\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{G_nH_n}{4^n} = \frac{4}{3}[\frac{\pi^2}{6} + di\log(\frac{3}{2}) - \ln(2)\ln(\frac{3}{2})]}$

- Pour $f(x) = e^{-\alpha x}$. On a $f^{(n)}(0) = (-\alpha)^n$, $F(t) = \frac{1}{t+\alpha}$ et $G(z) = \frac{1}{1+a-az}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty} s_n(-\alpha)^n = \sum_{n=1}^{n=\infty}(\frac{-\alpha}{2})^n H_n - \frac{2}{\alpha+2}\ln\left(\frac{2+2\alpha}{2+\alpha}\right) = -\frac{1}{\alpha+1}\sum_{n=1}^{n=\infty}(\frac{\alpha}{\alpha+1})^n\frac{G_n}{2^n}}.$$

On retrouve ainsi l'équivalence des deux développements classiques en série :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty} s_n x^n = 2\frac{\ln(1-x)}{x-2} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{n=\infty} H_n x^n = \frac{\ln(1-x)}{x-1}}$$

- Pour $f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{a^n}{n.n!}x^n$. On a $f^{(n)}(0) = \frac{a^n}{n}$. $F(t) = -\frac{1}{t}\ln(1-\frac{a}{t})$

  $G(z) = -\ln(1-a+az)$; $\frac{G^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n}(\frac{a}{a-1})^n$. La formule de dualité nous donne :

$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{a^n}{n.2^n}G_n = -\sum\frac{1}{n2^n}(\frac{a}{a-1})^n G_n$. L'application de (Sym) nous donne maintenant :

$\boxed{2\int_1^2\frac{tF(t) - 2F(2)}{t(t-2)}dt = -di\log(\frac{2-2a}{2-a}) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{a^n}{n2^n}(H_n - G_n)}$. Or on a vu plus haut :

$S = \sum_{n=1}^{n=\infty} s_n\frac{a^n}{n} = di\log(1-a) + di\log(2-a) + \ln(1-a)\ln(2-a) + \frac{\pi^2}{12}$. On obtient donc ici :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{a^n}{n.2^n}H_n = di\log(1-a) + di\log(2-a) - di\log(\frac{2-2a}{2-a}) + \ln(1-a)\ln(2-a) + \frac{\pi^2}{12}} \quad \text{(E)}$$

Avec $a = 1$ on retrouve la somme connue $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n}{n2^n} = \frac{\pi^2}{12}$ (Coffman 1987).

Avec $a = -1$ il vient $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n2^n} = di\log(3) - di\log(\frac{4}{3}) + \ln(2)\ln(3)$

Avec $a = \frac{2}{3}$ on trouve $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n}{n3^n} = -di\log(3) + di\log(\frac{4}{3}) + \frac{1}{2}\ln^2(\frac{3}{2})$

En additionnant avec le précédent : $\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n}{n}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)=\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{3}{2}\right)}$

On peut choisir a de façon que $2-a=\dfrac{2-2a}{2-a}$. On obtient $a=1\pm i$

L'égalité (E) a été établi pour a réel strictement inférieur à 2 mais par prolongement analytique s'étend sur le disque de convergence de la série entière en question.

Pour $a=1+i$ on obtient la belle égalité : $\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{\frac{ni\pi}{4}}}{n(\sqrt{2})^n}H_n=\frac{\pi^2}{48}+iCatalan}$

Remarquons qu'il existe une autre façon d'évaluer la série entière de l'égalité (E).

On se rappelle le développement obtenu dans le chapitre 7 : $-\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{a}\right)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\frac{H_n}{n+1}$

Comme $H_n=H_{n+1}-\dfrac{1}{n+1}$ on en déduit facilement, en posant $a=\dfrac{1}{x}$:

$\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\frac{H_{n+1}}{n+1}x^{n+1}=\frac{1}{2}\ln^2(1+x)+\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}x^{n+1}$. Or pour $|x|\le 1$ $\quad dilog(1+x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

On a donc : $\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{H_n}{n}x^n=\frac{1}{2}\ln^2(1+x)+dilog(1+x)}$

Si on pose $a=-2x$ dans l'égalité (E), on obtient l'expression :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}H_n=dilog(1+2x)+dilog(2+2x)-dilog\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)+\ln(1+2x)\ln(2+2x)+\frac{\pi^2}{12}$$

En égalant les deux quantités on obtient la formule facilement vérifiable directement:

$$dilog(1+2x)-dilog(1+x)+dilog(2+2x)-dilog\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\ln^2(1+x)-\ln(1+2x)\ln(2+2x)-\frac{\pi^2}{12}$$

Remarquons que dans l'exemple précédent où intervient la constante de Catalan, la comparaison des deux méthodes donne la relation fondamentale :

$$\boxed{dilog\left(\frac{1-i}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1-i}{2}\right)=\frac{\pi^2}{48}+iCatalan}$$

En simplifiant : $dilog\left(\frac{1-i}{2}\right)=\frac{5\pi^2}{96}-\frac{\ln^2(2)}{8}+i\left(Catalan-\pi\frac{\ln(2)}{8}\right)$

```
> Digits:=20;
```
$Digits := 20$

```
> evalf(dilog((1-I)/2));
```
0.45398526915029558331 + 0.64376733288926874874 I

```
> evalf(5*Pi^2/96-ln(2)^2/8+I*(Catalan-Pi*ln(2)/8));
```

0.453985269150295583333 + 0.64376733288926874874 I

On retrouve les relations obtenues au chapitre 8.

- Pour $f(x) = x^p$, on retrouve la formule $s_p = \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{2^k}{k}$

- Pour $f(x) = e^q J_0(2\sqrt{qx})$. On a $f^{(n)}(0) = e^q \times \frac{(-1)^n q^n}{n!}$ et $F(t) = \frac{1}{t} e^{q(\frac{t-1}{t})}$

MAPLE nous donne $\int_1^2 \frac{2F(2) - tF(t)}{t(t-2)} dt = \frac{e^{\frac{q}{2}}}{2} [\ln(2) - \gamma - \ln(|q|) + E_i(\frac{-q}{2})]$.

$$S = \sum_{n=1}^{n=\infty} f^{(n)}(0) s_n = e^q exleib(-q) = e^q \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n q^n}{n!} s_n$$

L'application de la formule nous conduit alors après simplifications à :

$$\boxed{exleib(-q) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n q^n}{n!} s_n = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n q^n}{2^n n!} H_n + e^{\frac{-q}{2}} [\ln(2) - \ln(|q|) - \gamma + E_i(-\frac{q}{2})]}$$

En particulier pour $q = 2$ on obtient la formule condensée :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (H_n - G_n) = \frac{\gamma + E_i(1,1)}{e} = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n.n!}}$$

Plus généralement si on pose $q = -2x$, on obtient, en se souvenant que l'on a établi plus haut l'égalité : $exleib(x) = 2e^{\frac{x}{2}} Shi(x)$, et en décomposant en série entière, on obtient :

$$2e^x \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n.n!} H_n + e^x [Ei(x) - \gamma - \ln(x)]$$

Or $Ei(x) - \gamma - \ln(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k.k!}$. On obtient donc après simplifications le développement :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{H_n}{n!} x^n = e^x . \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n.n!}}$$

(Formule due à Gosper, d'après mathworld : article 'harmonic numbers')

La dualité entre les coefficients $H_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ et $G_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{k}$ que l'on pourrait appeler nombres 'géoharmoniques', évidente dans les exemples précédents est encore renforcée si on compare la formule de Gosper avec celle obtenue en revenant au développement en série de la fonction $exleib(x) = 2e^{\frac{x}{2}} Shi(\frac{x}{2})$. On obtient en effet :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{G_n}{n!}x^n = e^x\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{[1+(-1)^{n+1}]x^n}{n.n!}}$$

(Avec nos notations internes , ce n'est autre que la fonction $x \mapsto exleib(2x)$)

En utilisant la réductrice $\varphi(x) = -2e^{-x}[Ei(1,-x)+i\pi]$ on peut écrire : Pour x strictement positif

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n}{n!}x^n = -\frac{\varphi(-x)}{2}+(\ln(x)+\gamma-i\pi)e^x \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{G_n}{n!}x^n = \frac{e^x}{2}[e^x\varphi(x)-e^{-x}\varphi(-x)-2i\pi]$$

Avec la fonction exponentielle intégrale on peut l'écrire : Pour x strictement positif.

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n}{n!}x^n = e^x[Ei(1,x)+\ln(x)+\gamma] \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{G_n}{n!}x^n = e^x[Ei(1,x)-Ei(1,-x)-i\pi]$$

```
> phi:=x->-2*exp(-x)*(Ei(1,-x)+I*Pi);
```

$$\phi := x \to -2\,\mathbf{e}^{(-x)}\,(\mathrm{Ei}(1,-x)+\pi I)$$

```
> h1:=x->-phi(-x)/2+exp(x)*(ln(x)+gamma-I*Pi);
```

$$h1 := x \to -\frac{1}{2}\phi(-x)+\mathbf{e}^x\,(\ln(x)+\gamma-\pi I)$$

```
> h2:=x->exp(x)*(Ei(1,x)+ln(x)+gamma);
```

$$h2 := x \to \mathbf{e}^x\,(\mathrm{Ei}(1,x)+\ln(x)+\gamma)$$

```
> g1:=x->exp(x)/2*(exp(x)*phi(x)-exp(-x)*phi(-x)-2*I*Pi);
```

$$g1 := x \to \frac{1}{2}\mathbf{e}^x\,(\mathbf{e}^x\,\phi(x)-\mathbf{e}^{(-x)}\,\phi(-x)-2\,I\,\pi)$$

```
> g2:=x->exp(x)*(Ei(1,x)-Ei(1,-x)-I*Pi);
```

$$g2 := x \to \mathbf{e}^x\,(\mathrm{Ei}(1,x)-\mathrm{Ei}(1,-x)-\pi I)$$

```
> series(h1(x),x=0,7);
```

$$x+\frac{3}{4}x^2+\frac{11}{36}x^3+\frac{25}{288}x^4+\frac{137}{7200}x^5+\frac{49}{14400}x^6+\mathrm{O}(x^7)$$

```
> series(h2(x),x=0,7);
```

$$x+\frac{3}{4}x^2+\frac{11}{36}x^3+\frac{25}{288}x^4+\frac{137}{7200}x^5+\frac{49}{14400}x^6+\mathrm{O}(x^7)$$

```
> series(g1(x),x=0,7);
```

$$2\,x+2\,x^2+\frac{10}{9}x^3+\frac{4}{9}x^4+\frac{32}{225}x^5+\frac{26}{675}x^6+\mathrm{O}(x^7)$$

```
> series(g2(x),x=0,7);
```

$$2\,x+2\,x^2+\frac{10}{9}x^3+\frac{4}{9}x^4+\frac{32}{225}x^5+\frac{26}{675}x^6+\mathrm{O}(x^7)$$

- Pour $f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n}{2^n n!}x^n$ qui est la 'duale harmonique' de $exleib(x)$

On a $f^{(n)}(0)=\frac{H_n}{2^n}$ et la transformée de Laplace est $F(p)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n}{2^n p^{n+1}}$.

Si on se rappelle $\sum_{n=1}^{n=\infty}H_n x^n=\frac{\ln(1-x)}{x-1}$, il vient $F(t)=2\frac{\ln(1-\frac{1}{2t})}{1-2t}$ et MAPLE nous donne :

$$u=2\int_1^2\frac{2F(2)-tF(t)}{t(t-2)}dt=\frac{2}{3}\ln^2(3)-\frac{8}{3}\ln(3)\ln(2)+2\ln^2(2)-\frac{4}{3}di\log(\frac{2}{3})$$

Or notre formule sympathique nous dit que cette intégrale vaut : $u=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{2^n}(H_n-G_n)$

C'est-à-dire ici : $u=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n}{4^n}(H_n-G_n)$.

Or nous avons évalué précédemment la somme $v=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{G_nH_n}{4^n}=\frac{4}{3}[\frac{\pi^2}{6}+di\log(\frac{3}{2})-\ln(2)\ln(\frac{3}{2})]$

On en déduit donc après simplifications et grâce à $di\log(\frac{2}{3})+di\log(\frac{3}{2})=-\frac{1}{2}\ln^2(\frac{2}{3})$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n^{\ 2}}{4^n}=\frac{8}{3}[\ln(2)\ln(\frac{2}{3})-di\log(\frac{2}{3})]+\frac{2\pi^2}{9}}$$

Voici la vérification MAPLE :

```
> F:=t->2*ln(1-1/(2*t))/(1-2*t);
```

$$F:=t\to\frac{2\ln\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{t}\right)}{1-2t}$$

```
> u:=2*int((t*F(t)-2*F(2))/(t*(t-2)),t=1..2);
```

$$u:=\frac{2}{3}\ln(3)^2-\frac{8}{3}\ln(3)\ln(2)+2\ln(2)^2-\frac{4}{3}\operatorname{dilog}\left(\frac{2}{3}\right)$$

```
> v:=(4/3)*(Pi^2/6+dilog(3/2)-ln(2)*ln(3/2));
```

$$v:=\frac{2\pi^2}{9}+\frac{4}{3}\operatorname{dilog}\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{4}{3}\ln(2)\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

```
> w:=simplify(u+v);
```

$$w:=\frac{2}{3}\ln(3)^2-4\ln(3)\ln(2)+\frac{10}{3}\ln(2)^2-\frac{4}{3}\operatorname{dilog}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{2\pi^2}{9}+\frac{4}{3}\operatorname{dilog}\left(\frac{3}{2}\right)$$

```
> s:=0;for i from 1 to 20 do
s:=evalf(s+harmonic(i)^2/(4^i));od;
```

$s := 0$ $s := 0.2500000000$ $s := 0.3906250000$ $s := 0.4431423611$ $s := 0.4600965712$
$s := 0.4651879883$ $s := 0.4666534424$ $s := 0.4670637762$ $s := 0.4671764890$
$s := 0.4672070183$ $s := 0.4672151997$ $s := 0.4672173740$ $s := 0.4672179480$
$s := 0.4672180987$ $s := 0.4672181381$ $s := 0.4672181484$ $s := 0.4672181511$
$s := 0.4672181518$ $s := 0.4672181520$ $s := 0.4672181520$ $s := 0.4672181520$

```
> evalf(w);
```
0.4672181529

Remarquons les deux décompositions dans la base des polynômes de Laguerre où intervient la réductrice :

$$\boxed{-\varphi(x)+2e^{-x}[\ln(x)+\gamma+\ln(2)]=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n}{2^n}L_n(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(x)=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{G_n}{2^n}L_n(x)}$$

- Pour $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a\frac{x}{1+t}}-1}{1+t}dt$. On a $f^{(n)}(0)=\frac{(-a)^n}{n}$ et $F(t)=\frac{-1}{t}\ln(1+\frac{a}{t})$

L'application avec MAPLE de la formule nous donne :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-a)^n}{n.2^n}(H_n-G_n)=-di\log(\frac{2+2a}{2+a})}$$

On retrouve le même résultat que dans un exemple précédent.

4.4. Une expression originale des nombres s_n .

Si on demande à MAPLE d'évaluer $G_n=2^n s_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{2^k}{k}$ il nous renvoie un surprenant résultat où intervient la fonction *LerchPhi*. Ceci s'explique si on regarde la relation de récurrence vérifiée par la suite $n\mapsto v_n=LerchPhi(2,1,n)$, soit : $2v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{n}$

Rappelons que LerchPhi est la fonction définie pour $|z|<1$ par :

$LerchPhi(z,a,v)=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{z^k}{(v+k)^a}$ et étendue par prolongement analytique au plan complexe.

```
> sum(2^k/k,k=1..n);
```
$$-\frac{1}{2}2^{(n+1)}\,\mathrm{LerchPhi}(2,1,n)+\frac{-2\,I\,\pi\,n+2\,2^n}{2\,n}$$

```
> simplify(LerchPhi(2,1,n+1)-LerchPhi(2,1,n));
```
$$-\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{LerchPhi}(2,1,n)\,n+1}{n}$$

On en déduit l'étonnante écriture du coefficient s_n, soit : $\boxed{s_n=\frac{-i\pi}{2^n}-LerchPhi(2,1,n)+\frac{1}{n}}$

On montre alors facilement en utilisant la décomposition $\sum_{n=1}^{n=\infty}s_n x^n=2\frac{\ln(1-x)}{x-2}$ l'égalité :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n=\infty}LerchPhi(2,1,n)x^n=\frac{x\ln(1-x)-2i\pi}{2-x}}$$

Les formules établies pour la suite des s_n se traduisent alors :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n} LerchPhi(2,1,k)+\ln(n)=-\gamma-i\pi \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{LerchPhi(2,1,n)}{n}=\frac{-\pi^2}{12}-i\pi\ln(2)$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} LerchPhi^2(2,1,n)=-\frac{2\pi^2}{9}+\frac{2i\pi\ln(2)}{3}$$

4.5. Résumé des principales formules 'duales'.

Nombres **harmoniques** $H_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$	Nombres '**géoharmoniques**' $G_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{2^k}{k}$
$\sum_{n=1}^{n=\infty} H_n x^n=\frac{\ln(1-x)}{x-1}$	$\sum_{n=1}^{n=\infty} G_n x^n=\frac{\ln(1-2x)}{x-1}$
$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n}{n}x^n=\frac{1}{2}\ln^2(1-x)+di\log(1-x)$	$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{G_n}{n}x^n=\frac{1}{2}\ln^2(1-x)+di\log(1-x)+di\log(\frac{1-2x}{1-x})$
$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n}{n!}x^n=e^x\int_0^x\frac{1-e^{-t}}{t}dt=e^x\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n.n!}$	$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{G_n}{n!}x^n=e^x\int_0^x\frac{e^t-e^{-t}}{t}dt=e^x\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{[1+(-1)^{n+1}]x^n}{n.n!}$
$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{H_n{}^2}{4^n}=\frac{2\pi^2}{9}+\frac{8}{3}[\ln(2)\ln(\frac{2}{3})-di\log(\frac{2}{3})]$	$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{G_n{}^2}{4^n}=\frac{4\pi^2}{9}$