

# MESURES EQUINORMALES.

➤ Reprise des pérégrinations.....	Page 2.
➤ Mesures équinormales.....	Pages 3 à 27.
1. Définitions et exemples.....	3.
1.1. Mesures de Tchebychev.....	3.
1.2. Mesure de Lebesgue.....	7.
1.3. Mesure secondaire de Lebesgue.....	9.
2. Justification théorique.....	10.
2.1. Lemme.....	10.
2.2. Application fondamentale. ....	11.
2.3. Localisation générale des racines.....	14.
2.4. Retour sur la deuxième condition.....	15.
2.5. Autres exemples.....	15.
3. Sur les polynômes orthogonaux des mesures équinormales.....	17.
3.1. Mesures de Tchebychev.....	17.
3.2. Extension de l'étude.....	19.
3.3. Une homotopie d'isométries.....	20.
3.4. Formules d'inversion.....	22.
4. Sur la mesure de Dirac.....	23.
5. Exemple des densités de Laguerre associées.....	24.

« Sois satisfait des fleurs, des fruits, même des feuilles, si c'est dans ton jardin à toi que tu les cueilles..... »

Edmond Rostand. Cyrano de Bergerac.

## Une halte salutaire.

Au mois de décembre 2006 il me sembla que j'avais suffisamment avancé pour écrire une synthèse claire de mes travaux tout en gardant en trame le chemin de recherche suivi.

Je me lançais donc dans un dur travail de mise en forme en pensant naïvement que ce projet descriptif assez original pouvait intéresser un éditeur.

Hélas les refus courtois de Belin, Ellipses et autres maisons me ramenèrent à une dure réalité.

Grâce au WEB je tombais sur un article passionnant de Jean Claude Allouche, professeur au CNRS, concernant la recherche expérimentale en mathématiques. Les idées développées allaient exactement dans le sens du message que je voulais transmettre par mes écrits. Je lui envoyais un MAIL et il me répondit aussitôt et avec extrême gentillesse sur ce délicat problème d'être édité. Sa réponse m'aida à surmonter le refus de Harmattan et à clore ma quête éditoriale.

Débarassé de ce poids je repris donc le chemin de ma recherche interrompu pendant quatre mois. Après avoir éludé avec succès le problème des mesures secondaires successives (étude détaillée dans la section 'compléments' de ce site), je me tournai naturellement vers celui inversé de la recherche de densités conduisant à une mesure secondaire donnée. Dès le début de mon étude j'avais trouvé deux conditions suffisantes résumées sous forme d'équations intégrales mais je n'avais pas poussé plus loin les investigations. L'introduction de la normalisation pour construire les densités secondaires successives me conduisit alors à rechercher les mesures admettant une même densité secondaire normalisée. En commençant par étudier le cas de mesures symétriques, je ramenai les deux équations à une seule, et commençais une étude MAPLE de l'existence des solutions. A ma grande surprise apparaissaient des courbes constantes sur un palier, me donnant toute une famille de densités 'équinormalisées'. Je pensais encore expliquer ce fait par l'intermédiaire des moments, mais l'intuition était forte que la rupture du palier venait d'une apparition soudaine de résidus et que la clef était plus du côté des fonctions analytiques. Effectivement comme on va le voir dans ce qui suit, tout s'explique par cette voie en revenant au couplage des transformées de Stieltjes.

Apparaît alors à partir d'une densité  $\rho$  donnée, une homotopie  $t \mapsto \rho_t$  de densités admettant toutes la même mesure secondaire normalisée lorsque  $t$  décrit  $]0,1[$ . Il est remarquable que les polynômes orthonormaux pour  $\rho_t$  sont combinaisons simples des polynômes primaires et secondaires associés à la mesure  $\rho$ . Intéressant aussi de voir apparaître en limite lorsque  $t$  tend vers 0 la mesure de Dirac concentrée au premier moment  $c_1$ , ce qui donne un nouvel éclairage de l'espérance et pourrait intéresser des Physiciens.

Ajoutons l'émergence de nouvelles isométries reliées aussi par une homotopie et permettant de résoudre un nouveau type d'équations intégrales liées à l'opérateur  $T_\rho$ . Tout ceci méritait bien un nouveau chapitre à ce livre qui restera sans doute virtuel sauf intervention d'une bienveillante providence..... Merci à mes futurs lecteurs.

Toulon, le Mercredi 28 mars 2007.

# MESURES EQUINORMALES.

## 1. Définition et exemples.

Par définition nous dirons que deux mesures sont équinormales si elles conduisent à la même densité secondaire normalisée.

### 1.1. Mesures de Tchebychev.

Un premier exemple déjà rencontré est donnée par le couple formé par les densités de

Tchebychev de première et deuxième forme sur  $] -1, 1[$ , soit  $\rho_1(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$  et  $\rho_2(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$ . En effet la mesure secondaire de  $\rho_1$  est  $\frac{1}{2}\rho_2$  et celle de  $\rho_2$  est  $\frac{1}{4}\rho_2$ .

Nous allons effectuer une étude plus générale de cette situation et faire apparaître des exemples assez étonnants de classes de mesures admettant la même densité secondaire normalisée. Nous noterons  $I$  l'intervalle d'étude.

Rappelons pour commencer que si  $\mu$  est une mesure de réductrice  $\psi$ , la densité  $\rho_1$  de moment d'ordre 1 noté  $c'_1$  admet  $\mu$  comme mesure secondaire si et seulement si elle est du

type  $\rho_1(x) = \frac{\mu(x)}{\left[\frac{\psi(x)}{2} - (x - c'_1)\right]^2 + \pi^2\mu^2(x)}$  avec  $c'_1$  solution des équations :

$$\int_I \frac{\mu(x)dx}{\left[\frac{\psi(x)}{2} - (x - c'_1)\right]^2 + \pi^2\mu^2(x)} = 1 : (\text{Eq1}) \quad \text{et} \quad \int_I \frac{(x - c'_1)\mu(x)dx}{\left[\frac{\psi(x)}{2} - (x - c'_1)\right]^2 + \pi^2\mu^2(x)} = 0 . (\text{Eq2}).$$

Soit  $\rho$  une densité donnée, de réductrice  $\varphi$ . On sait alors que sa mesure secondaire  $\mu$  est

$$\text{définie par } \mu(x) = \frac{\rho(x)}{\frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2\rho^2(x)} \text{ et a pour réductrice } \psi(x) = 2(x - c_1) - \frac{\varphi(x)}{\frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2\rho^2(x)},$$

avec  $c_1$  moment d'ordre 1 de  $\rho$ .

La densité  $\rho_1$  aura donc même densité secondaire normalisée que  $\rho$  si et seulement si il existe un réel  $\lambda$  strictement positif tel que la mesure secondaire de  $\rho_1$ , soit  $\lambda\mu$ .

$$\text{Cela revient à dire que } \rho_1 \text{ sera définie par } \rho_1(x) = \frac{\lambda\mu(x)}{\left[\frac{\lambda\psi(x)}{2} - (x - c'_1)\right]^2 + \pi^2\lambda^2\mu^2(x)} .$$

Explicité à partir des éléments  $(\rho, \varphi, c_1)$  cela nous donne après simplifications :

$$\rho_1(x) = \frac{\lambda \rho(x) \left[ \frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2 \rho^2(x) \right]}{\left[ ((\lambda - 1)x + c'_1 - \lambda c_1) \left( \frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2 \rho^2(x) \right) - \lambda \frac{\varphi(x)}{2} \right]^2 + \pi^2 \lambda^2 \rho^2(x)} \quad \text{ou encore :}$$

$$\rho_1(x) = \frac{\lambda \rho(x)}{\left[ ((\lambda - 1)x + c'_1 - \lambda c_1) \frac{\varphi(x)}{2} - \lambda \right]^2 + \pi^2 \rho^2(x) ((\lambda - 1)x + c'_1 - \lambda c_1)^2}$$

Pour que  $\rho_1$  soit effectivement solution il nous reste à ajuster les deux paramètres  $\lambda$  et  $c'_1$  de façon que les équations (Eq1) et (Eq2) soient satisfaites, autrement dit que  $\rho_1$  soit bien une mesure de densité de premier moment  $c'_1$ .

Nous allons dans un premier temps chercher des conditions suffisantes pour réaliser plus facilement ces deux contraintes. Plaçons nous par exemple dans le cas où la mesure  $\rho$  est symétrique par rapport au milieu  $m$  de l'intervalle borné  $I$ .  $\rho(2m - x) = \rho(x)$ .

On montre alors facilement que  $c_1 = m$  et que  $\varphi(2m - x) = -\varphi(x)$ .

Cherchons alors s'il existe d'autres mesures solutions  $\rho_1$  pour lesquelles on aura la coïncidence des moments d'ordre 1 :  $c'_1 = c_1$ . D'après ce qui précède, elles seront du type :

$$\rho_1(x) = \frac{\lambda \rho(x)}{\left[ ((\lambda - 1)(x - c_1) - \lambda) \frac{\varphi(x)}{2} + \pi^2 \rho^2(x) (\lambda - 1)^2 (x - c_1)^2 \right]}$$

Elles seront donc aussi symétriques par rapport au milieu  $m$  et satisfèront donc automatiquement à l'équation (Eq2) dès que la première sera assurée. Reste donc à ajuster le paramètre  $\lambda$  de façon que  $\rho_1$  soit bien une mesure de probabilité.

Ceci nous amène à étudier la fonction de la variable réelle  $t$  :

$$t \mapsto f(t) = t \int \frac{\rho(x) dx}{\left[ ((t - 1)(x - c_1) - t) \frac{\varphi(x)}{2} + \pi^2 \rho^2(x) (t - 1)^2 (x - c_1)^2 \right]}$$

Ceci en vue de déceler d'éventuelles solutions autres que  $t=1$  pour l'équation  $f(t) = 1$ .

Examinons par exemple le cas de la mesure de Tchebychev sur  $]-1,1[$  :

$$\rho(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2} \quad \text{pour laquelle } c_1 = 0 \text{ et } \varphi(x) = 4x.$$

$$\text{La fonction } f \text{ se résume alors à } t \mapsto f(t) = \frac{2t}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{t^2 + 4(1 - t)x^2} dx$$

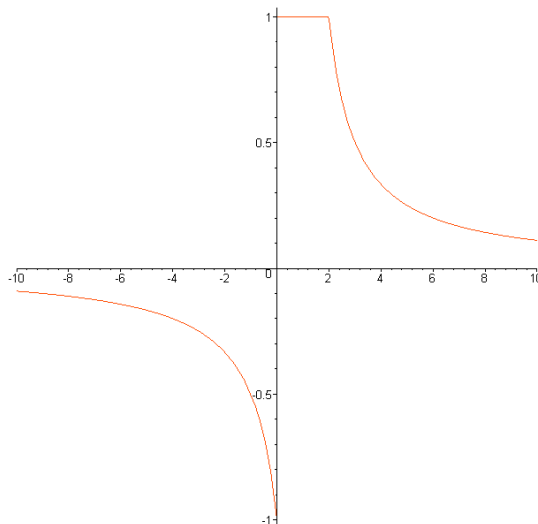
Une rapide visualisation de la courbe à l'aide de MAPLE suggère que  $f$  est constante égale à 1 sur la plage  $]0,2]$ .

```
> f:=proc(t)
local x,g;
g:=evalf((2*t/Pi)*int(sqrt(1-x^2)/(t^2+4*(1-t)*x^2),x=-
1..1));end;
f:=proc(t)
local x,g;
g:=evalf(2*t/Pi*int(sqrt(1-x^2)/(t^2+4*(1-t)*x^2),x=-1..1))
end proc
```

```
> f(1/3);
```

1.

```
> plot(f);
```



On peut vérifier cela par un calcul intégral direct. On a donc ici toute une famille de densités équinormales définies par  $\rho_t(x) = \frac{2t\sqrt{1-x^2}}{\pi[t^2 + 4(1-t)x^2]}$ , avec  $t$  décrivant  $]0, 2]$ .

On vérifie que la mesure secondaire de  $\rho_t$  est  $\mu_t = \frac{t}{4} \left( \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} \right)$  et que la réductrice est définie par  $\varphi_t(x) = \frac{2(4-2t)x}{t^2 + 4(1-t)x^2}$ .

La transformée de Stieltjes est égale à :  $S_t(z) = \frac{2}{(2-t)z + t\sqrt{z^2 - 1}}$

Pour  $t=1$  on retrouve bien sûr la mesure de Tchebychev de deuxième espèce.

Pour  $t=2$  on obtient la mesure de Tchebychev de première espèce.

Pour  $t = \frac{4}{3}$  on a  $\rho(x) = \frac{6\sqrt{1-x^2}}{\pi(4-3x^2)}$  avec  $\varphi(x) = \frac{6x}{4-3x^2}$ .

Les polynômes orthonormaux relatifs à cette mesure sont définis par :

$$P_0(X) = 1; P_1(X) = \sqrt{3}X; P_2(X) = \frac{2\sqrt{3}}{3}(3X^2 - 1); n \geq 2: P_{(n+1)}(X) = 2XP_n(X) - P_{n-1}(X)$$

Les coefficients de Fourier de la réductrice par rapport à ce système sont donnés par :

$$C_{2n}(\varphi) = 0; C_{2n+1}(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{3^n}.$$

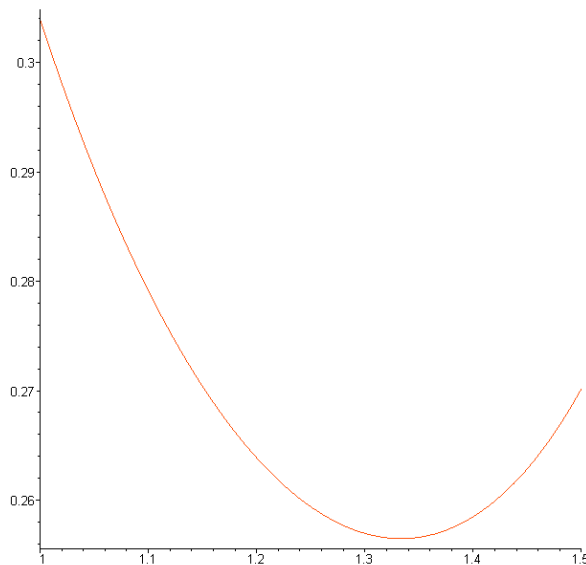
Cette valeur de  $t$  est celle qui minimise l'intégrale  $\int_{-1}^1 \varphi_t^2(x) \rho_t(x) dx = \frac{4\pi^2}{3} \int_{-1}^1 (\rho_t(x))^3 dx$

Ce minimum est égal à  $\frac{27}{8}$ .

```
> h:=proc(t)
local x,g;
g:=evalf(int((t*(2/Pi)*sqrt(1-x^2)/(t^2+4*(1-t)*x^2))^3,x=-
1..1));end;
  h := proc(t)
    local x, g;
    g :=
      evalf(int(8*t^3*sqrt(1-x^2)^3/(pi^3*(t^2+4*(1-t)*x^2)^3), x = -1 .. 1))
  end proc

> h(4/3);
                                0.2564692460

> plot(h,1..3/2);
```



## 1.2. La mesure de Lebesgue sur [0,1] .

Densité uniforme  $\rho(x) = 1$  de réductrice  $\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$  avec un moment d'ordre 1  $c_1 = \frac{1}{2}$ .

La fonction  $f$  correspondante est ici définie par :

$$t \mapsto f(t) = t \int_0^1 \frac{dx}{[(t-1)(x-\frac{1}{2})\ln(\frac{x}{1-x})-t]^2 + \pi^2(t-1)^2(x-\frac{1}{2})^2}$$

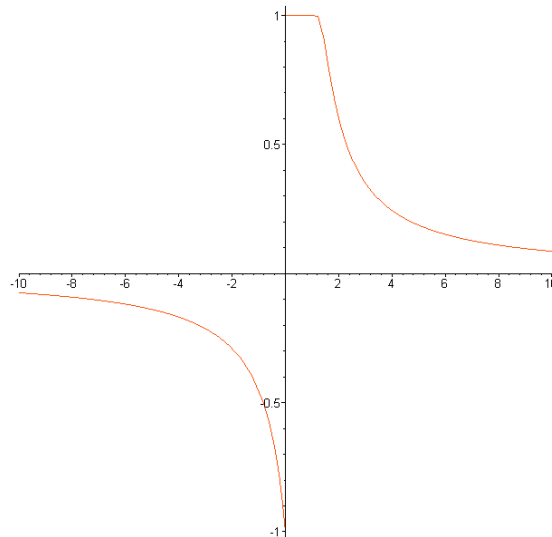
Ici encore la représentation de la courbe fait apparaître une plage sur laquelle  $f$  est constante égale à 1, mais ici la justification théorique de ce phénomène est loin d'être évidente.

```
> f:=proc(t)
local x,g;
g:=evalf(t*int(1/(((t-1)*(x-1/2)*ln(x/(1-x))-t)^2+Pi*Pi*(t-1)^2*(x-1/2)^2),x=0..1));end;
f:=proc(t)
local x,g;
g := evalf(t*int(
1/(((t-1)*(x-1/2)*ln(x/(1-x))-t)^2 + pi^2*(t-1)^2*(x-1/2)^2), end proc
x=0..1))
```

```
> f(1.3);
```

0.9799849175

```
> plot(f);
```



L'étude MAPLE suggère donc que pour  $t$  décrivant  $]0,1[$ , la mesure secondaire de la densité

$$\rho_t(x) = \frac{t}{[(t-1)(x-\frac{1}{2})\ln(\frac{x}{1-x})-t]^2 + \pi^2(t-1)^2(x-\frac{1}{2})^2} \text{ est : } \mu_t(x) = \frac{t}{[\ln^2(\frac{x}{1-x}) + \pi^2]}.$$

On peut obtenir une autre vérification de la cohérence de cette proportionnalité en examinant les moments d'ordre 2.

Les couplages entre les transformées de Stieltjes se traduisent en effet :

$$S_{\mu}(z) = z - c_1 - \frac{1}{S_{\rho}(z)} \quad \text{et} \quad tS_{\mu}(z) = z - c_1 - \frac{1}{S_{\rho_t}(z)} .$$

Ceci conduit naturellement à la relation :  $c'_2 - (c'_1)^2 = t(c_2 - (c_1)^2)$ .

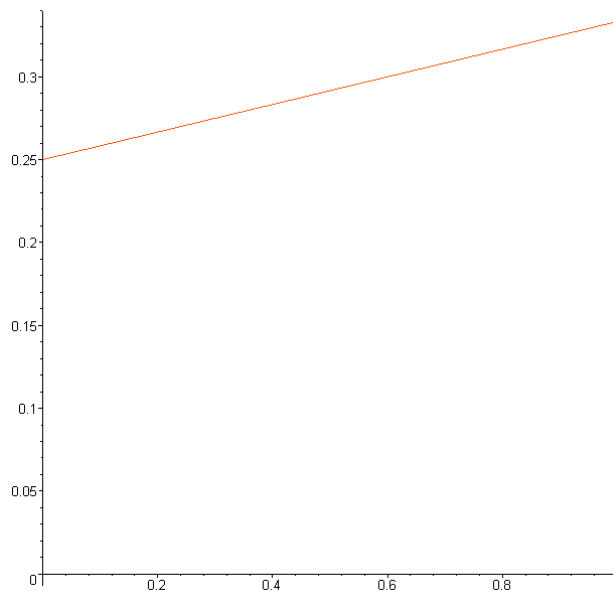
Or ici pour la mesure de Lebesgue :  $c_1 = c'_1 = \frac{1}{2}$  et  $c_2 = \frac{1}{3}$ . On est donc conduit à

l'expression :  $c'_2 = \frac{t+3}{12}$ , ce que semble confirmer l'étude MAPLE suivante :

```
> f2:=proc(t)
local x,g;
g:=evalf(t*int(x^2/(((t-1)*(x-1/2)*ln(x/(1-x))-t)^2+Pi*Pi*(t-1)^2*(x-1/2)^2),x=0..1));end;

f2:=proc(t)
local x,g;
g:=evalf(t*int(
x^2/(((t-1)*(x-1/2)*ln(x/(1-x))-t)^2+pi^2*(t-1)^2*(x-1/2)^2), end proc
x=0..1))

plot(f2,0..1);
```



1.3. Voici un troisième exemple MAPLE concernant  $\rho(x) = \frac{12}{\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2}$ .

```
> ro:=x->12/((ln(x/(1-x)))^2+Pi^2);
```

$$ro := x \rightarrow \frac{12}{\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \pi^2}$$

```
> phi:=x->12*(2*x-1)+2*ln((1-x)/x)*ro(x);
```

$$\phi := x \rightarrow 24x - 12 + 2 \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) ro(x)$$

```
> phi(x);
```

$$24x - 12 + \frac{24 \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \pi^2}$$

```
> f:=proc(t)
```

```
local x,g;
```

```
> g:=evalf(t*int(ro(x)/(((t-1)*(x-1/2)*phi(x)/2-  
t)^2+Pi^2*ro(x)^2*(t-1)^2*(x-1/2)^2),x=0..1));end;
```

```
f:=proc(t)
```

```
local x, g;
```

```
g := evalf(t*int(ro(x)/(
```

```
(1/2*(t-1)*(x-1/2)*phi(x)-t)^2 + pi^2*ro(x)^2*(t-1)^2*(x-1/2)^2),
```

```
x=0..1))
```

```
> f(1);
```

1.000000000

```
> f(0.7435);
```

```
>
```

1.000000000

```
> f(0.2489);
```

0.9999999999

```
> f(1.2547);
```

1.000000000

```
> f(1.5874);
```

0.9999978154

```
> f(2);
```

0.8409594124

```
> f(3);
```

0.4621735491

## 2. Essai de justification théorique.

Nous commencerons par démontrer le résultat suivant :

### 2.1. Lemme.

Nous considérons ici une fonction de variable complexe  $H$ , supposée holomorphe sur l'ouvert  $O$  formé du plan complexe privé de l'intervalle  $I$ .

Nous supposons également que le module de  $H(z)$  tend vers 0 lorsque le module de  $z$  tend vers l'infini et que pour tout  $\lambda > 0$   $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \int_{-1-\lambda}^{-1+\lambda} |H(t - i\varepsilon) + H(t + i\varepsilon)| dt = 0$ .

On suppose enfin l'existence de la fonction  $\nu$  définie sur  $I$  par :

$$\nu(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{H(x - i\varepsilon) - H(x + i\varepsilon)}{2i\pi} . \text{ (Convergence dans } L^1(I) \text{ )}$$

On se propose de montrer que la transformée de Stieltjes de  $\nu$  n'est autre que la fonction  $H$ .

Soit  $Z$  un complexe n'appartenant pas à l'intervalle borné  $I$ . (Pour faciliter la rédaction on prendra  $I = [-1, 1]$ , mais le raisonnement se généralise facilement au cas d'un intervalle borné quelconque).

Introduisons la fonction  $z \mapsto f(z) = \frac{H(z)}{(z - Z)}$ . Celle-ci est holomorphe sur l'ouvert  $O$  sauf au point  $Z$  où elle admet pour résidu  $H(Z)$ . Fixons alors un réel  $\lambda > 0$

Considérons le rectangle  $R_\varepsilon$  de côtés parallèles aux axes, parcouru dans le sens direct et passant par les quatre sommets d'affixes respectives :  $1 + \lambda + \varepsilon(\pm i)$ ;  $-1 - \lambda + \varepsilon(\pm i)$ , avec  $\varepsilon > 0$ .

Considérons aussi le cercle  $C_b$  centré sur l'origine et de rayon  $b$ , parcouru également dans le sens direct.

Si on prend  $b$  assez grand, le pôle  $Z$  de  $f$  sera à l'intérieur de ce cercle. Or quels que soient  $\varepsilon$  et  $b$  positifs, les chemins  $R_\varepsilon$  et  $C_b$  sont homotopes dans l'ouvert  $O$ . On a donc d'après le

théorème de Cauchy l'égalité :  $\int_{R_\varepsilon} f(z) dz = \int_{C_b} f(z) dz - 2i\pi H(Z)$ .

Nous allons étudier l'évolution de cette égalité lorsque  $b$  tend vers l'infini et que  $\varepsilon$  tend vers 0 par valeur supérieure.

➤ Il est clair que sur les segments parallèles à l'axe des imaginaires purs, la contribution de la première intégrale tend vers 0 avec  $\varepsilon$  car  $f$  admet une limite finie aux points

$$1 + \lambda \text{ et } -1 - \lambda . \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(1 + \lambda + it) idt = 0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(-1 - \lambda + it) idt = 0 .$$

➤ Sur les deux parallèles à l'axe réel, on obtient en additionnant les deux intégrales sur des chemins inversés:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1-\lambda}^{1+\lambda} \left( \frac{H(t-i\varepsilon)}{t-i\varepsilon-Z} - \frac{H(t+i\varepsilon)}{t+i\varepsilon-Z} \right) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1-\lambda}^{1+\lambda} \frac{(t-Z)[H(t-i\varepsilon) - H(t+i\varepsilon)] dt}{(t-Z-i\varepsilon)(t-Z+i\varepsilon)} + J(\varepsilon) \right)$$

avec  $J(\varepsilon) = i\varepsilon \int_{-1-\lambda}^{1+\lambda} \frac{H(t-i\varepsilon) + H(t+i\varepsilon)}{(t-Z-i\varepsilon)(t-Z+i\varepsilon)} dt$ . Il est donc clair d'après les hypothèses sur  $H$  au voisinage de l'intervalle réel  $I$  que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J(\varepsilon) = 0$ .

D'autre part  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1-\lambda}^{1+\lambda} \frac{(t-Z)[H(t-i\varepsilon) - H(t+i\varepsilon)] dt}{(t-Z-i\varepsilon)(t-Z+i\varepsilon)} = 2i\pi \int_{-1-\lambda}^{1+\lambda} \frac{\nu(t) dt}{t-Z}$ , ceci vu la convergence vers la fonction  $\nu$  dans  $L^1(I)$ .

➤ Remarquons enfin que lorsque  $b$  tend vers l'infini, l'intégrale le long du cercle  $C_b$  tend vers 0 de manière évidente. (Lemme de Jordan).

On conclut ensuite en faisant tendre  $\lambda$  vers 0.  $\int_{-1}^1 \frac{\nu(t) dt}{Z-t} = S_\nu(Z) = H(Z)$ , ce qu'il fallait établir.

Considérons alors une densité  $\rho_t$  dont la mesure secondaire est égale à  $t\mu$ .

Le couplage des transformées de Stieltjes se traduit :

$$S_\mu(z) = z - c_1 - \frac{1}{S_\rho(z)} \text{ et } tS_\mu(z) = z - c_1 - \frac{1}{S_{\rho_t}(z)} .$$

On en déduit immédiatement la relation  $S_{\rho_t}(z) = \frac{S_\rho(z)}{t + (1-t)(z - c_1)S_\rho(z)}$ .

## 2.2. Une application fondamentale.

Appliquons, sous réserve de vérification des hypothèses, le lemme précédent à la fonction  $H$  définie par la formule :  $H(z) = \frac{S_\rho(z)}{t + (1-t)(z - c_1)S_\rho(z)}$ .

Vu les formules de Stieltjes Perron appliquées à la densité initiale  $\rho$ , on en déduit par passage à la limite :  $\nu(x) = \frac{t\rho(x)}{[(t-1)(x-c_1)\frac{\Phi(x)}{2} - t]^2 + \pi^2\rho^2(x)(t-1)^2(x-c_1)^2}$ .

La fonction  $\nu$  s'explique donc comme la fonction  $\rho_t$  définie précédemment et que l'on espère être une densité. Or d'après le lemme, la transformée de Stieltjes de  $\nu = \rho_t$  n'est autre que

$$H(z) \text{ donc est reliée à la transformée de } \mu \text{ par } S_{\rho_t}(z) = \frac{1}{z - c_1 - S_\mu(z)}.$$

Son moment d'ordre 0 sera donc bien  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z S_{\rho_t}(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z} - \frac{S_\mu(z)}{z}} = 1$ .

Reste à étudier quelles sont les valeurs de  $t$  assurant à  $H$  les hypothèses du Lemme.

Il est clair que  $H$  tend vers 0 lorsque le module de  $z$  tend vers l'infini.

Pour l'étude au voisinage de l'intervalle  $I$ , on utilise encore les formules de Stieltjes, ce qui conduit en fait à la réductrice  $\varphi_t$  de la mesure  $\rho_t$ .

On obtient après simplification des calculs et à partir de  $\varphi_t(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} S_{\rho_t}(x - i\varepsilon) + S_{\rho_t}(x + i\varepsilon)$  la

$$\text{formule : } \varphi_t(x) = \frac{2(x - c_1) - t\psi(x)}{[x - c_1 - t\frac{\psi(x)}{2}]^2 + t^2\pi^2\mu^2(x)}, \text{ avec } \psi \text{ réductrice de } \mu.$$

Reste le problème de l'holomorphie de  $H$  sur l'ouvert  $O = \mathbb{C} - I$ .

Elle sera assurée de manière évidente si le paramètre  $t$  est tel que le dénominateur de  $H$  ne s'annule pas sur cet ouvert.

Etudions donc l'équation  $\boxed{t + (1-t)(z - c_1)S_\rho(z) = 0}$ .

Posons  $m = \frac{t}{t-1}$  et  $z = x + iy$ . On obtient :  $\int_I \frac{(x - c_1 + iy)\rho(u)du}{x - u + iy} = m$

En séparant les parties réelles et imaginaires, cela devient :

$$\int_I \frac{x^2 + y^2 - u(x - c_1) - c_1x}{(x - u)^2 + y^2} \rho(u)du = m \text{ et } y \int_I \frac{c_1 - u}{(x - u)^2 + y^2} \rho(u)du = 0$$

Etudions d'abord les solutions hors de l'axe réel.

$$\text{En effet si } y \text{ est non nul on aura } \int_I \frac{u}{(x - u)^2 + y^2} \rho(u)du = \int_I \frac{c_1}{(x - u)^2 + y^2} \rho(u)du.$$

La comparaison des parties réelles peut alors s'écrire :

$$\int_I \frac{x^2 + y^2 + c_1^2 - 2c_1x}{(x - u)^2 + y^2} \rho(u)du = m \int_I \frac{x^2 + y^2 + u^2 - 2c_1x}{(x - u)^2 + y^2} \rho(u)du$$

Après réduction cela devient :  $\int_I \frac{(1-m)[(x-c_1)^2 + y^2] + m(c_1^2 - u^2)}{(x-u)^2 + y^2} \rho(u) du = 0$

En revenant à  $t$  :  $\int_I \frac{[(x-c_1)^2 + y^2] + t(u^2 - c_1^2)}{(x-u)^2 + y^2} \rho(u) du = 0$

Si  $c_1 = 0$ , il n'y a donc pas de solutions non réelles pour  $t$  positif.

Etudions maintenant d'éventuelles solutions réelles.

L'équation se simplifie facilement en :  $\int_I \frac{m.u + (1-m)x - c_1}{x-u} \rho(u) du = 0$ .

En revenant à  $t$  il vient :  $\int_I \frac{t.u - x + c_1(1-t)}{x-u} \rho(u) du = 0$

Ici encore, si  $c_1 = 0$  il n'y a pas de solutions réelles si  $0 < t < 1$ , hors de l'intervalle  $I$ .

Par contre il peut y en avoir si  $t$  est plus grand que 1. C'est ce qui se passe pour la mesure de Tchebychev. Dans l'exemple numérique  $t = 3$ .

```
> ro:=x->sqrt(1-x^2);
```

$$ro := x \rightarrow \sqrt{1-x^2}$$

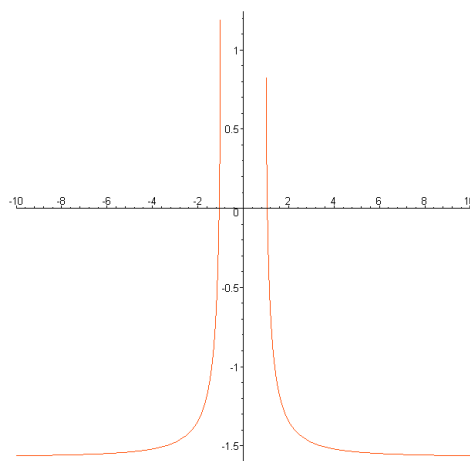
```
> f:=proc(x)
```

```
local t,f;
```

```
f:=evalf(int((3*t-x)*ro(t)/(x-t),t=-1..1));end;
```

```
f:=proc(x) local t,f;f:=evalf(int((3*t-x)*ro(t)/(x-t),t=-1..1)) end proc
```

```
> plot(f);
```



```
> f(1.06);
```

0.005893680455

```
> f(1.07);
```

-0.07793247767

### 2.3. Localisation générale des racines.

Montrons maintenant que même si  $c_1$  n'est pas nul, l'équation  $t + (1-t)(z - c_1)S_p(z) = 0$  n'admet pas de solutions en dehors de l'intervalle  $I$  lorsque  $t$  est élément de  $]0, 1[$ .

➤ Reprenons d'abord l'étude de solutions non réelles ( $y=0$ ). On a alors établi les égalités :

$$\int_I \frac{u}{(x-u)^2 + y^2} \rho(u) du = \int_I \frac{c_1}{(x-u)^2 + y^2} \rho(u) du \quad \text{et} \quad \int_I \frac{[(x-c_1)^2 + y^2] + t(u^2 - c_1^2)}{(x-u)^2 + y^2} \rho(u) du = 0.$$

$$\text{Or } [(x-c_1)^2 + y^2] + t(u^2 - c_1^2) = x^2 - 2c_1x + y^2 + tu^2 + (1-t)c_1^2$$

$$\text{La première égalité intégrale nous donne : } \int_I \frac{-2xu}{(x-u)^2 + y^2} \rho(u) du = \int_I \frac{-2xc_1}{(x-u)^2 + y^2} \rho(u) du$$

(Ceci en multipliant par  $-2x$ ). On en déduit la transformation de la deuxième intégrale :

$$J = \int_I \frac{[(x-c_1)^2 + y^2] + t(u^2 - c_1^2)}{(x-u)^2 + y^2} \rho(u) du = 0 = \int_I \frac{[(x-u)^2 + y^2] + (t-1)(u^2 - c_1^2)}{(x-u)^2 + y^2} \rho(u) du = K$$

Ecrivons maintenant  $0 = (1-t)J + tK$ . Après simplifications, cela s'écrit :

$$\int_I \frac{((1-t)(x-c_1)^2 + y^2 + t(x-u)^2)}{(x-u)^2 + y^2} \rho(u) du = 0, \text{ impossible si } t \text{ est compris entre } 0 \text{ et } 1.$$

➤ Examinons d'éventuelles solutions réelles. On a vu que cela conduisait à l'égalité :

$$\int_I \frac{t.u - x + c_1(1-t)}{x-u} \rho(u) du = 0. \text{ Or le numérateur s'écrit aussi : } -t(x-u) + (1-t)(c_1 - x)$$

$$\text{On en déduit : } \int_I \frac{(1-t)(c_1 - x)}{x-u} \rho(u) du = t.$$

$$\text{Ecrivons alors } c_1 - x = c_1 - u + u - x. \text{ On en déduit : } t - 1 + \int_I \frac{(1-t)(c_1 - u)}{x-u} \rho(u) du = t$$

$$\text{Ainsi : } \int_I \frac{(1-t)(c_1 - u)}{x-u} \rho(u) du = 1$$

Or si  $x$  est 'à droite' de l'intervalle  $I$  donc supérieur à tout  $u$  de  $I$  et donc aussi à  $c_1$  on aura :

$$\frac{c_1 - u}{x - u} < \frac{x - u}{x - u} = 1. \text{ D'où l'on déduit si } t < 1 : 1 \leq \int_I \frac{(1-t)(x-u)}{x-u} \rho(u) du = 1 - t \text{ d'où } t \text{ négatif.}$$

(On obtient une contradiction analogue si  $x$  est 'à gauche de  $I$ ).

L'équation  $t + (1-t)(z - c_1)S_p(z) = 0$  n'a donc pas de solutions sur l'ouvert  $O = \mathbb{C} - I$  lorsque  $t$  est élément de  $]0, 1[$ .

## 2.4. Retour sur la deuxième condition (Eq2).

Dans notre première approche nous avons supposé la symétrie de la densité  $\rho$ , ce qui donnait la deuxième équation (Eq2) comme conséquence directe de la normalisation de  $\rho_t$ .

En fait la démonstration effectuée assure simultanément les deux contraintes sur les moments d'ordre 0 et 1. En effet on a établi que pour  $t$  décrivant la plage  $]0,1[$ , et sous réserve des

conditions énoncées, la transformée de Stieltjes de  $\rho_t$  est définie par :  $S_{\rho_t}(z) = \frac{1}{z - c_1 - tS_{\mu}(z)}$

On en déduit immédiatement que lorsque le module de  $z$  tend vers l'infini :

$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z S_{\rho_t}(z) = 1$  et  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^2 (S_{\rho_t}(z) - \frac{1}{z}) = c_1$ . Il est donc clair que  $\rho_t$  définie par

$$\rho_t(x) = \frac{t\rho(x)}{\left[ ((t-1)(x-c_1)\frac{\varphi(x)}{2} - t)^2 + \pi^2 \rho^2(x)(t-1)^2(x-c_1)^2 \right]}$$
 est une densité de probabilité de

premier moment égal à  $c_1$  et de mesure secondaire égale à  $t\mu$ .

## 2.5. Autres exemples.

Étayons cette étude théorique par les deux exemples suivants mettant précisément en jeu des densités non symétriques.

➤ Pour  $\rho(x) = 2x$  sur  $[0, 1]$ , la réductrice est  $\varphi(x) = -4x \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) - 4$  et  $c_1 = \frac{2}{3}$ .

```
> ro:=x->2*x;
```

```
ro := x → 2 x
```

```
> phi:=x->-4*(x*ln((1-x)/x)+1);;
```

```
phi := x → -4 x ln( (1-x)/x ) - 4
```

```
> c1:=evalf(int(x*ro(x),x=0..1));
```

```
c1 := 0.66666666667
```

```
> f:=proc(t)
```

```
local x,g;
```

```
g:=evalf(t*int(ro(x)/(((t-1)*(x-c1)*phi(x)/2-t)^2+Pi^2*(t-1)^2*ro(x)^2*(x-c1)^2),x=0..1));end;
```

```
f:=proc(t)
```

```
local x,g;
```

```
g := evalf(t*int(ro(x)/(
```

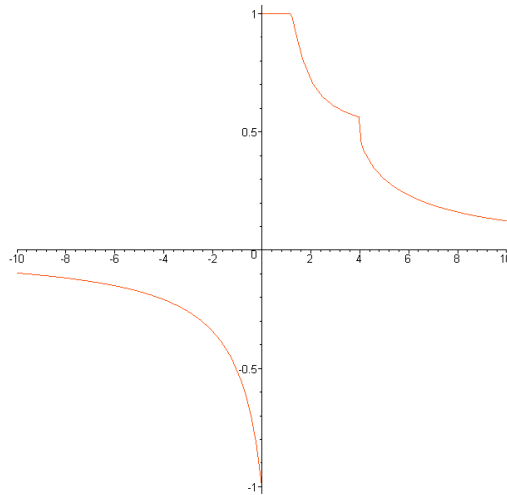
```
(1/2*(t-1)*(x-c1)*phi(x)-t)^2 + pi^2*(t-1)^2*ro(x)^2*(x-c1)^2),
```

```
x=0..1))
```

```
> f(0.45);
```

0.9999999999

```
> plot(f);
```



➤ Pour  $\rho(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$  sur  $[0, 1]$ , la réductrice est  $\phi(x) = 3\text{LerchPhi}(x, 1, -\frac{1}{2})$  et  $c_1 = \frac{3}{5}$ .

```
> ro:=x->3*sqrt(x)/2;    ro := x →  $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ 
```

```
> c1:=int(x*ro(x),x=0..1);    c1 :=  $\frac{3}{5}$ 
```

```
> phi:=x->3*LerchPhi(x,1,-1/2);    phi := x →  $3 \text{LerchPhi}\left(x, 1, -\frac{1}{2}\right)$ 
```

```
> f:=proc(t)
```

```
  local x,g;
```

```
  g:=evalf(int(ro(x)/(((t-1)*(x-c1)*phi(x)/2-
```

```
  t)^2+Pi^2*ro(x)^2*(t-1)^2*(x-c1)^2),x=0..1));evalf(t*g);end;
```

```
  f:=proc(t)
```

```
    local x, g;
```

```
      g := evalf(int(ro(x)/(
```

```
        (1/2*(t-1)*(x-c1)*phi(x)-t)^2 + pi^2*ro(x)^2*(t-1)^2*(x-c1)^2),
```

```
        x=0..1));
```

```
          evalf(t*g)
```

```
        end proc
```

```
> f(1);
```

1.

```
> f(0.8);
```

1.0000000000

```

> f(0.7);
1.000000000

> f(0.6);
1.000000000

> f(0.5);
1.000000000

> f(0.45628);
0.9999999999

> f(0.3287);
1.000000000

> f(0.2157);
1.000000000

> f(2);
0.7496041742

> f(1.24);
0.9911159300

> f(0.1);
1.000000000

```

### **3. Sur les polynômes orthogonaux de mesures équinormales.**

Dans une famille équinormale, toutes les mesures secondaires sont proportionnelles. Il s'ensuit que les polynômes secondaires satisfont à une même relation de récurrence à trois termes. Les polynômes orthonormaux correspondant à une densité  $\rho_t$  de la famille en question vérifieront donc aussi la même relation de récurrence, (à partir du rang 2 si on se souvient du décalage étudié dans le premier résultat fondamental du chapitre 2).

Il suffira donc d'évaluer par directement par Schmidt les trois premiers polynômes puis de faire fonctionner la relation de récurrence de la mesure secondaire normalisée commune. .

#### **3.1. Cas des mesures de Tchebychev.**

Dans le premier exemple de Tchebychev on a déjà examiné le cas particulier  $t = \frac{4}{3}$ . Si on généralise, on aura donc :

$P_0 = 1; P_1 = \frac{2x}{\sqrt{t}}; P_2 = \frac{4x^2 - t}{\sqrt{t}}$ ; Et pour  $n \geq 2: P_{n+1} = 2xP_n - P_{n-1}$ . Voici la simulation MAPLE.

```

> ro := (t, x) -> (2/Pi) * t * sqrt(1-x^2) / (t^2 + 4*(1-t)*x^2);
      ro := (t, x) -> \frac{2t\sqrt{1-x^2}}{\pi(t^2 + 4(1-t)x^2)}
> P[0] := 1; P[1] := 2*x/sqrt(t); P[2] := (4*x^2 - t)/sqrt(t);
      P_0 := 1

```

$$P_1 := \frac{2x}{\sqrt{t}}$$

$$P_2 := \frac{4x^2 - t}{\sqrt{t}}$$

> for k from 2 to 7 do P[k+1]:=simplify(2\*x\*P[k]-P[k-1]);od;

$$P_3 := \frac{2x(4x^2 - t - 1)}{\sqrt{t}}$$

$$P_4 := \frac{16x^4 - 4x^2t - 8x^2 + t}{\sqrt{t}}$$

$$P_5 := \frac{2x(16x^4 - 4x^2t - 12x^2 + 2t + 1)}{\sqrt{t}}$$

$$P_6 := \frac{64x^6 - 16x^4t - 64x^4 + 12x^2t + 12x^2 - t}{\sqrt{t}}$$

$$P_7 := \frac{2x(64x^6 - 16x^4t - 80x^4 + 16x^2t + 24x^2 - 3t - 1)}{\sqrt{t}}$$

$$P_8 := \frac{256x^8 - 64x^6t - 384x^6 + 80x^4t + 160x^4 - 24x^2t - 16x^2 + t}{\sqrt{t}}$$

> for k from 0 to 7 do f[k]:=unapply(P[k],t,x);od;

$$f_0 := 1$$

$$f_1 := (t, x) \rightarrow \frac{2x}{\sqrt{t}}$$

$$f_2 := (t, x) \rightarrow \frac{4x^2 - t}{\sqrt{t}}$$

$$f_3 := (t, x) \rightarrow \frac{2x(4x^2 - t - 1)}{\sqrt{t}}$$

$$f_4 := (t, x) \rightarrow \frac{16x^4 - 4x^2t - 8x^2 + t}{\sqrt{t}}$$

$$f_5 := (t, x) \rightarrow \frac{2x(16x^4 - 4x^2t - 12x^2 + 2t + 1)}{\sqrt{t}}$$

$$f_6 := (t, x) \rightarrow \frac{64x^6 - 16x^4t - 64x^4 + 12x^2t + 12x^2 - t}{\sqrt{t}}$$

$$f_7 := (t, x) \rightarrow \frac{2x(64x^6 - 16x^4t - 80x^4 + 16x^2t + 24x^2 - 3t - 1)}{\sqrt{t}}$$

```

> scal:=proc(s,p,q)
local x,g;

g:=evalf(int(f[p](s,x)*f[q](s,x)*ro(s,x),x=-1..1));end;
      scal:=proc(s,p,q)
      local x,g;
      g:=evalf(int(f[p](s,x)*f[q](s,x)*ro(s,x),x=-1..1))
      end proc

> scal(1.897,4,4);
1.000000000

> scal(0.2687,5,7);
0.

> scal(0.879,6,6);
0.9999999994

> scal(1.5473,6,4);
-0.17 10-9

> scal(0.189,5,5);
0.9999999998

> scal(1.321,2,6);
0.144824447510-9

```

### 3.2. Extension de l'étude.

On généralise facilement au cas d'une densité quelconque. Par le procédé de Schmidt on obtient les trois premiers polynômes orthogonaux pour  $\rho_t$  définis par :

$$P_0^t = 1; P_1^t = \frac{x - d_1}{\sqrt{d_0 t}}; P_2^t = \frac{d_0 x^2 - d_1(d_0 + 1)x + (d_1)^2 - t(d_0)^2}{\sqrt{t d_0} \sqrt{d_0 d_2 - (d_1)^2}} \quad \text{avec } d_n = \int_I x^n \mu(x) dx.$$

On obtient alors une expression du type : Pour  $n \geq 1$  
$$P_n^t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} [P_n(x) + (t-1)U_n(x)]$$

avec  $n \mapsto P_n$  système orthonormal pour  $\rho$  (obtenus pour  $t=1$ )

et les  $U_n$  construits à partir de  $U_1(x) = 0; U_2(x) = -\frac{d_0 \sqrt{d_0}}{\sqrt{d_0 d_2 - (d_1)^2}}$  à l'aide de la même relation de récurrence à trois termes que celle définissant les polynômes  $P_n$ .

On peut montrer en fait que pour  $n \geq 2$   $U_n(x) = -\sqrt{d_0} R_{n-2}(x)$ , la suite  $n \mapsto R_n$  étant la suite orthonormale pour la mesure secondaire  $\nu$  associée à la densité normalisée  $\frac{\mu}{d_0}$  construite par

Schmidt à partir de  $R_0(x) = 1$ . (En quelque sorte les polynômes ‘tertiaires associés à la densité initiale  $\rho$ ).

En effet les deux suites de polynômes  $n \mapsto U_n(x)$  et  $n \mapsto -\sqrt{d_0}R_{n-2}(x)$  vérifient la même relation de récurrence (celle des  $P_n$ ) et un calcul MAPLE montre la coïncidence des deux premiers termes.

$$\text{On a donc pour } n \geq 2 : \boxed{P_n^t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} [P_n(x) + (1-t)\sqrt{d_0}R_{n-2}(x)]}$$

Or on se rappelle (chap 6) que les polynômes orthonormaux pour la mesure secondaire  $\nu$  sont obtenus à partir des polynômes primaires et secondaires associés à la densité initiale  $\rho$  par :

$$R_n(x) = \frac{1}{\sqrt{d_0}}((x - c_1)Q_{n+2}(x) - P_{n+2}(x)). \text{ On a donc l'expression simplifiée : pour } n \geq 2$$

$$\boxed{P_n^t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} [tP_n(x) + (1-t)(x - c_1)Q_n(x)]}$$

En fait l'utilisation des formules de passage permettent de retrouver directement cette relation sans passer par les polynômes ‘tertiaires’. En effet puisque les densités  $\rho$  et  $\rho_t$  ont même

moment d'ordre 1, soit  $c_1$  et même mesure secondaire normalisée  $\mu_0 = \frac{\mu}{d_0}$  on peut donc écrire

les égalités suivantes:

$$\begin{cases} \sqrt{d_0}Q_{n+1}(x) = \sqrt{d_0 t}Q_{n+1}^t(x) \\ \frac{1}{\sqrt{d_0}}[(x - c_1)Q_{n+1}(x) - P_{n+1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{d_0 t}}[(x - c_1)Q_{n+1}^t(x) - P_{n+1}^t(x)] \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que pour  $n$  entier au moins égal à 1 :

$$\boxed{\begin{cases} P_n^t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} [tP_n(x) + (1-t)(x - c_1)Q_n(x)] \\ Q_n^t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} Q_n(x) \end{cases}}$$

### 3.3. Une homotopie d'isométries.

Si on se souvient que  $Q_n = T_\rho(P_n)$ , la correspondance  $f(x) \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} [tf(x) + (1-t)T_\rho(f(x))]$

agissant sur les polynômes transforme donc d'après la première formule ci-dessus la famille  $(P_n)_{n \geq 1}$  orthonormale pour la densité  $\rho$  en la famille  $(P_n^t)_{n \geq 1}$  orthonormale pour la densité  $\rho_t$ .

D'après le théorème de Cauchy, on peut donc lorsque l'espace des fonctions polynômes est dense dans  $L^2(I, \rho)$ , prolonger cette application en une isométrie reliant l'hyperplan  $H$  formé des fonctions de  $L^2(I, \rho)$  orthogonales à  $P_0 = 1$  à l'hyperplan  $H_\rho^t$  constitué des fonctions de

$L^2(I, \rho_t)$  orthogonales à  $P_0^t = 1$ . Si on introduit la mesure  $\tilde{\rho}_t = \frac{\rho_t}{t}$ , on en déduit que l'application  $V_\rho^t$  définie par  $f(x) \mapsto V_\rho^t(f(x)) = tf(x) + (1-t)(x-c_1)T_\rho(f(x))$  est une isométrie reliant  $H$  muni de la norme de  $L^2(I, \rho)$  à  $H_\rho^t$  muni de la norme induite par  $\tilde{\rho}_t$ .

$$\int_I f^2(x)\rho(x)dx = \int_I [tf(x) + (1-t)(x-c_1)T_\rho(f(x))]^2 \frac{\rho_t(x)dx}{t} = \int_I [V_\rho^t(f(x))]^2 \tilde{\rho}_t(x)dx$$

On va voir que sous réserve d'une condition de densité relative à la mesure  $\rho_t$  cette isométrie est en fait égale à la composée  $V_\rho^t = T_{\rho_t}^{-1} \circ T_\rho$ , en notant suivant les conventions habituelles :

- $T_\rho$  l'isométrie reliant  $H$  muni de la norme induite par  $\rho$  à  $L^2(I, \mu)$ .
- $T_{\rho_t}$  reliant  $H_\rho^t$  muni de la norme sur  $L^2(I, \rho_t)$  à l'espace  $L^2(I, t\mu)$ . (La définition de cette dernière nécessitant également la densité des polynômes dans  $L^2(I, \rho_t)$ , ce qui est assuré par exemple si  $I$  est un compact).

En effet utilisons les formules d'inversion établies au chapitre 6 :

$$\begin{cases} T_\rho^{-1}(f(x)) = (x-c_1)f(x) - T_\mu(f(x)) \\ T_{\rho_t}^{-1}(f(x)) = (x-c_1)f(x) - T_{t\mu}(f(x)) \end{cases}$$

Puisque de manière évidente  $T_{t\mu} = tT_\mu$ , on en déduit par combinaison de ces deux formules :

$$(T_{\rho_t}^{-1} - tT_\rho^{-1})(f(x)) = (1-t)(x-c_1)f(x)$$

Si  $f$  est une fonction polynôme, sa transformée par  $f$  l'est aussi et on peut donc appliquer la relation précédente en remplaçant  $f(x)$  par  $T_\rho(f(x))$ .

Appliqué avec  $f(x) \leftarrow T_\rho(f(x))$  on obtient :  $T_{\rho_t}^{-1}(T_\rho(f(x))) - tf(x) = (1-t)(x-c_1)T_\rho(f(x))$

Cette relation traduit bien l'égalité :  $V_\rho^t(f(x)) = T_{\rho_t}^{-1} \circ T_\rho(f(x))$  pour les polynômes.

Or  $T_{\rho_t}$  étant une isométrie de  $H_\rho^t$  muni de la norme sur  $L^2(I, \rho_t)$  à l'espace  $L^2(I, t\mu)$ , c'est aussi une isométrie pour la norme au départ induite par la mesure  $\tilde{\rho}_t = \frac{\rho_t}{t}$  avec pour norme à l'arrivée celle sur  $L^2(I, \mu)$ . Ainsi la composée  $T_{\rho_t}^{-1} \circ T_\rho$  est comme  $V_\rho^t$  une isométrie de  $H$  muni de la norme de  $L^2(I, \rho)$  vers  $H_\rho^t$  muni de la norme induite par  $\tilde{\rho}_t$ .

Par densité des polynômes, la coïncidence s'étend donc à l'espace  $H$  entier et on a donc bien vérifié :  $V_\rho^t = T_{\rho_t}^{-1} \circ T_\rho$ .

### 3.4. Formules d'inversion et équations intégrales.

On peut classiquement inverser l'isométrie  $V_\rho^t$  par :  $(V_\rho^t)^{-1} = T_\rho^{-1} \circ T_{\rho_t}$ .

Essayons d'expliciter cette composée des réciproques.

Prenons à nouveau pour  $f$  une fonction polynôme et appliquons les formules d'inversion pour  $T_\rho$  et  $T_{\rho_t}$  avec  $f(x) \leftarrow T_{\rho_t}(f(x))$ . On en déduit aussitôt :

$$\begin{cases} (V_\rho^t)^{-1}(f(x)) = (x - c_1)T_{\rho_t}(f(x)) - T_\mu(T_{\rho_t}(f(x))) \\ f(x) = (x - c_1)T_{\rho_t}(f(x)) - tT_\mu(T_{\rho_t}(f(x))) \end{cases}$$

Par combinaison des deux on en déduit :  $(V_\rho^t)^{-1}(f(x)) = \frac{1}{t}f(x) + (1 - \frac{1}{t})(x - c_1)T_{\rho_t}(f(x))$ .

On généralise par densité à une fonction quelconque de  $H_t$ . Les deux formules définissant  $V_\rho^t$  et sa réciproque ont donc des expressions assez similaires :

$$\boxed{\begin{cases} V_\rho^t(f(x)) = tf(x) + (1-t)(x - c_1)T_{\rho_t}(f(x)) \\ (V_\rho^t)^{-1}(f(x)) = \frac{1}{t}f(x) + (1 - \frac{1}{t})(x - c_1)T_{\rho_t}(f(x)) \end{cases}}$$

Application à la résolution d'équations intégrales.

Considérons l'équation  $(E_\lambda) : f(x) + \lambda(x - c_1) \int_t^x \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \rho(u) du = g(x)$  avec  $\lambda > 0$ ,  $g$  donnée et  $f$  inconnue élément de l'hyperplan  $H$ .

Posons  $t = \frac{1}{1 + \lambda}$ . L'équation proposée se met alors facilement par division sous la forme :  $tf(x) + (1 - t)(x - c_1)T_{\rho_t}(f(x)) = tg(x)$ , c'est-à-dire  $V_\rho^t(f(x)) = tg(x)$ , avec  $t \in ]0, 1[$ .

D'après l'étude précédente elle n'admettra de solutions que si  $g$  est élément de l'Hyperplan  $H_t$  et l'antécédent  $f$  pour  $V_\rho^t$  sera donné par  $f(x) = \frac{1}{t}(tg(x)) + (1 - \frac{1}{t})(x - c_1)T_{\rho_t}(tg(x))$ , soit après simplifications :  $f(x) = g(x) + \frac{\lambda}{1 + \lambda}(x - c_1)T_{\rho_{\frac{1}{1+\lambda}}}(g(x))$ .

#### 4. Sur la mesure de Dirac.

Nous venons de montrer que pour  $t$  décrivant  $]0,1[$ , toutes les mesures définies par la formule

$$\rho_t(x) = \frac{t\rho(x)}{[(t-1)(x-c_1)\frac{\varphi(x)}{2} - t]^2 + \pi^2\rho^2(x)(t-1)^2(x-c_1)^2}$$

donnent une mesure secondaire égale à  $t\mu(x)$ , avec  $\mu(x) = \frac{\rho(x)}{\frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2}$ .

On a donc une famille continue équinormalisée. Il est remarquable que lorsque  $t$  tend vers 0, la limite de cette famille n'est autre que la mesure de Dirac concentrée en  $c_1$ .

Toutes ces mesures sont en effet des densités et on vérifie facilement que pour toute fonction continue  $f$  sur  $I$  :  $\lim_{t \rightarrow 0} \int_I f(u)\rho_t(u)du = f(c_1)$ .

On remarque également que la réductrice  $\varphi_t(x)$  de  $\rho_t(x)$  tend vers celle de Dirac, soit

$$\frac{2}{x-c_1}.$$

La transformée de Stieltjes de  $\delta_{c_1}$  est  $S_{\delta_{c_1}}(z) = \frac{1}{z-c_1}$ .

Toujours au sens des distributions, on peut écrire :  $\lim_{t \rightarrow 0^+} (x-c_1)^2 \frac{\rho_t}{t} = \mu$ .

## 5. Etude des densités de Laguerre associées.

Elles sont définies sur  $]0, +\infty[$  par  $\rho(x) = \frac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}$  avec  $\alpha > -1$ .

Les moments correspondants sont égaux à :  $c_n = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \prod_{k=1}^{k=n} (\alpha+k)$ .

On se propose d'expliciter la réductrice  $\varphi$  par deux méthodes différentes : de manière classique d'abord, avec les formules de Stieltjes Perron, puis à l'aide d'une équation différentielle vérifiée par cette réductrice.

➤ Par Stieltjes Perron.

Rappelons  $\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(x, \varepsilon)$  avec  $\varphi(x, \varepsilon) = \int_0^{+\infty} \frac{2(x-t)\rho(t)dt}{(x-t)^2 + \varepsilon^2}$ . En intégrant par parties il vient :

$$\varphi(x, \varepsilon) = \left[ -\rho(t) \left( \ln((x-t)^2 + \varepsilon^2) - \ln(x^2 + \varepsilon^2) \right) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \left( \ln((x-t)^2 + \varepsilon^2) - \ln(x^2 + \varepsilon^2) \right) \rho'(t) dt$$

Le terme intégré s'annule et on obtient donc en passant à la limite :

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} (\alpha-t) e^{-t} \ln \left| \frac{x-t}{x} \right| dt}$$

➤ Par une équation différentielle.

La densité  $\rho$  satisfait de manière évidente à la relation  $x\rho'(x) = (\alpha-x)\rho(x)$ .

On va voir que cela se traduit par une équation similaire du premier ordre vérifiée par la transformée de Stieltjes de  $\rho$ , soit :  $S(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\rho(t)dt}{z-t}$ .

En effet : en dérivant par rapport à  $z$  puis en intégrant par parties on obtient :

$$S'(z) = \int_0^{+\infty} -\frac{\rho(t)dt}{(z-t)^2} = \left[ \rho(t) \left( \frac{1}{t-z} + \frac{1}{z} \right) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t\rho'(t)dt}{z(t-z)} = -\frac{1}{z} \int_0^{+\infty} \frac{t\rho'(t)dt}{t-z}$$

$$\text{Vu l'équation liée à } \rho : S'(z) = -\frac{1}{z} \int_0^{+\infty} \frac{(\alpha-t)\rho(t)dt}{t-z} = \frac{\alpha}{z} S(z) + \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} \frac{t\rho(t)dt}{t-z}$$

$$\text{Or } zS(z) = \int_0^{+\infty} \frac{z\rho(t)dt}{z-t} = \int_0^{+\infty} \frac{(z-t)\rho(t)dt}{z-t} + \int_0^{+\infty} \frac{t\rho(t)dt}{z-t} = 1 + \int_0^{+\infty} \frac{t\rho(t)dt}{z-t}$$

Des deux égalités ci-dessus on déduit :  $zS'(z) = \alpha S(z) - zS(z) + 1$ .

Il s'ensuit d'après la définition de la réductrice que  $\varphi$  est solution de l'équation du premier ordre :  $x\varphi'(x) + (x - \alpha)\varphi(x) = 2$ .

On en déduit immédiatement une expression du type :

$$\varphi(x) = x^\alpha e^{-x} (\lambda + u(x)) \text{ avec } u'(x) = 2x^{-(\alpha+1)} e^x \text{ et } \lambda \text{ constante.}$$

Nous supposons dans ce qui suit que  $-1 < \alpha < 0$ . On peut alors poser  $u(x) = 2 \int_0^x t^{-(\alpha+1)} e^t dt$  et la constante  $\lambda$  sera déterminée grâce à la relation classique  $\int_0^{+\infty} \varphi(x) \rho(x) dx = 0$  ;

(Pour  $\alpha \geq 0$  on prendra pour définir  $u$  une borne inférieure non nulle et l'on détermine la constante par le même raisonnement. Cependant dans le cas  $-1 < \alpha < 0$  les calculs se simplifient assez comme on va le voir ci après).

Explicitons  $\int_0^{+\infty} \varphi(x) \rho(x) dx = 0$ .

$$\lambda \int_0^{+\infty} x^{2\alpha} e^{-2x} dx + 2 \int_0^{+\infty} x^{2\alpha} e^{-2x} \left( \int_0^x t^{-(\alpha+1)} e^t dt \right) dx = 0, \text{ dont on déduit :}$$

$$\lambda = -\frac{4^{\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+1)} \int_0^{+\infty} x^{2\alpha} e^{-2x} \left( \int_0^x t^{-(\alpha+1)} e^t dt \right) dx$$

En transformant  $t$  en  $tx$  dans l'intégrale en  $t$  :  $\int_0^x t^{-(\alpha+1)} e^t dt = x^{-\alpha} \int_0^1 t^{-(\alpha+1)} e^{tx} dt$

Les fonctions intervenant étant toutes positives, on peut permuter les variables d'intégration, ce qui donne vu que  $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(2-t)x} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2-t)^{\alpha+1}}$ , la valeur de la constante égale à :

$$\lambda = -\frac{4^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \int_0^1 [t(2-t)]^{-(\alpha+1)} dt. \text{ Ainsi on obtient une autre expression de la réductrice :}$$

$$\boxed{\varphi(x) = x^\alpha e^{-x} \left[ 2 \int_0^x t^{-(\alpha+1)} e^t dt - \frac{4^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \int_0^1 [t(2-t)]^{-(\alpha+1)} dt \right]}$$

Le programme MAPLE suivant compare les deux expressions.

```
> f:=proc(x,a)
local t,g;
g:=evalf(int(t^(a-1)*(a-t)*ln((x-t)^2/x^2)*exp(-t),t=0..infinity));g:=evalf(g/GAMMA(a+1));end;
f:=proc(x,a)
local t,g;
g:=evalf(int(t^(a-1)*(a-t)*ln((x-t)^2/x^2)*exp(-t),t=0..infinity));
g:=evalf(g/GAMMA(a+1))
end proc
```

```

> g1:=proc(x,a)
local t,u,h,s;
u:=evalf(int(t^(-a-1)*exp(t),t=0..x));end;
  g1 := proc(x,a) local t,u,h,s; u := evalf(int(t^(-a-1)*exp(t),t=0..x)) end proc

> g2:=proc(x,a)
local t,u,h,s;
h:=evalf(int((t*(2-t))^(-a-1),t=0..1));
end;
  g2 := proc(x,a) local t,u,h,s; h := evalf(int((t*(2-t))^(-a-1),t=0..1)) end proc

> g3:=proc(x,a)
local t,u,h,s;
u:=g1(x,a);h:=g2(x,a);
s:=evalf(u-GAMMA(a+1)*h/(GAMMA(2*a+1)*2*4^(-a-1)));s:=evalf(2*x^a*exp(-x)*s);end;
  g3 := proc(x,a)
local t,u,h,s;
  u := g1(x,a);
  h := g2(x,a);
  s := evalf(u - 1/2*Gamma(a+1)*h/(Gamma(2*a+1)*4^(-a-1)));
  s := evalf(2*x^a*exp(-x)*s)
  end proc

> f(9,-0.77);
                                0.2290177131

> g3(9,-0.77);
                                0.2290177131

> f(5,-0.82);
                                0.4206090561

> g3(5,-0.82);
                                0.4206090559

> f(12.35,-0.24);
                                0.1738246202

> g3(12.35,-0.24);
                                0.1738246202

```

Le cas particulier  $\alpha = -\frac{1}{2}$  conduit à l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}}(1+2t)e^{-t} \ln \left| \frac{x-t}{x} \right| dt = -2\sqrt{\pi} \int_0^1 \frac{e^{(t-1)x}}{\sqrt{t}} dt$$

La réductrice est ici définie par  $\varphi(x) = 2 \int_0^1 \frac{e^{(t-1)x}}{\sqrt{t}} dt$ . Ici aussi il semble que le schéma d'homotopie est encore valable sur la plage ]0, 1] comme le suggère l'étude MAPLE suivante :

```

> ro:=x->exp(-x)/sqrt(Pi*x);   ro := x →  $\frac{e^{(-x)}}{\sqrt{\pi x}}$ 
> phi:=proc(x)
local t,g;
g:=evalf(2*int(exp((t-1)*x)/sqrt(t),t=0..1));end;
  φ := proc(x) local t, g; g := evalf(2×int(exp((t-1)×x)/sqrt(t), t = 0 .. 1)) end proc
> c1:=int(x*ro(x),x=0..infinity);   c1 :=  $\frac{1}{2}$ 
> f:=proc(t)
local x,g;
g:=evalf(t*int(ro(x)/(((t-1)*(x-c1)*phi(x)/2-
t)^2+Pi^2*ro(x)^2*(x-c1)^2*(t-1)^2),x=0..infinity));end;
  f := proc(t)
local x, g;
  g := evalf(t×int(ro(x)/(
  (1/2×(t-1)×(x-c1)×φ(x)-t)^2 + π^2×ro(x)^2×(x-c1)^2×(t-1)^2), end proc
  x = 0 .. ∞))
> for k from 1 to 20 do print(evalf(k/10),f(k/10));od;
0.100000000Q 1.000000000
0.200000000Q 1.000000000
0.300000000Q 0.999999999
0.400000000Q 1.000000000
0.500000000Q 1.000000000
0.600000000Q 1.000000000
0.700000000Q 1.000000000
0.800000000Q 1.000000000
0.900000000Q 0.999999999
1., 1.
1.10000000Q 0.7897257130
1.20000000Q 0.6829871496
1.30000000Q 0.6181127426
1.40000000Q 0.5745323300
1.50000000Q 0.5433146979
1.60000000Q 0.5199271510
1.70000000Q 0.5018155843
1.80000000Q 0.4874279306
1.90000000Q 0.4757654701
2., 0.4661559734

```