

# COMPLEMENTS

Au cours de ces mois de recherche plusieurs questions me tenaillaient régulièrement. D'abord bien sûr, pourquoi tout cela marchait il si bien ? De quel puzzle était tombé la première formule trouvée il y a plus de vingt ans ? A quel ordre profond obéissait cette première isométrie que j'avais tiré des relations de récurrence à trois termes ?

Une autre chose m'intriguait. Dans mes applications numériques j'obtenais souvent des même valeurs d'intégrales par deux méthodes différentes : d'une part en utilisant les caractères isométriques des opérateurs  $T$  ou  $S$ , d'autre part en utilisant simplement la relation fondamentale de composition entre ces deux objets.

La lumière sur ce point me vint lorsque je décidai de regarder au plus près l'action de  $T$  sur les séries entières, ce que j'avais d'ailleurs fait dès le début pour des applications numériques mais uniquement dans le premier cas particulier de la mesure de Lebesgue. Un schéma dépouillé apparût alors, avec un opérateur agissant sur des suites numériques, représenté dans la base canonique par une matrice infinie. Sous ce regard on va le voir, tout devient clair, la relation de composition et les caractères isométriques fusionnent bien en une configuration élémentaire de matrices de Gram synthétisant les relations fondamentales entre les moments des deux mesures.

Mais cela n'expliquait pas tout. L'apparition de la réductrice par exemple qui est en général hors de cet espace réduit des séries entières. Je n'avais donc pas encore atteint l'ordre original.

C'est en voulant encore une fois obtenir l'impossible que je touchai au but. Dès le début de l'étude en effet j'avais pensé comme tout un chacun itérer mon procédé initial et donc considérer la mesure secondaire de la mesure secondaire et ainsi de suite.

La complexité du premier exemple m'avait vite refroidi puisque déjà  $\rho(x) = 1$  conduisait à

$$\mu(x) = \frac{1}{\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2}.$$

Lorsque vers Avril je pensai à utiliser les formules de Stieltjes-Perron

j'avançai quand même un peu sur ce point et j'obtins une écriture explicite de la réductrice de la mesure secondaire. Mais là encore je ne pensais pas pouvoir aller beaucoup plus loin.

J'avais aussi une carte à jouer que j'avais laissé en réserve. Dans la preuve de mon tout premier résultat j'utilise la proportionnalité des numérateurs de deux approximants de Padé et on s'en souvient cela suffit pour en déduire l'orthogonalité des polynômes secondaires. Ensuite j'avais tiré le fil et on connaît la suite. Cependant je n'avais pas regardé ce que pouvait donner la proportionnalité des dénominateurs. Je me lançai donc dans cette étude et elle porta ses fruits. Tout d'abord une formule d'inversion plus simple de l'opérateur  $T$  apparut. Puis je retrouvai naturellement l'expression de la réductrice  $\psi$  de la mesure secondaire et une relation de quasi dualité entre  $\rho, \mu, \varphi, \psi$  s'imposa alors.

Ce retour aux fractions, aux réduites d'origine fut décisif. Dès le début de l'étude j'avais en fait la trame essentielle et je ne l'avais pas vu ! Dans ma première relation il y avait en fait tout simplement l'amorce d'un schéma de fractions continues. De plus un schéma extrêmement classique, celui qui permet d'obtenir facilement la suite des approximants de

Padé de la transformée de Stieltjes de  $\rho$  ! On inverse, on soustrait deux termes, on normalise et on recommence. Cependant cet aveuglement n'avait pas été inutile. Si j'étais parti directement dans cette voie royale je n'aurais peut être pas rencontré la réductrice ni musardé à droite et à gauche glanant comme on l'a vu de bien belles formules.

De plus les calculs menés me donnaient maintenant un schéma identique de fractions continues, mais mettant en jeu cette fois la quantité complexe  $Z(x) = \varphi(x) + i\pi\rho(x)$ , donc prenant tout son sens à l'intérieur de l'intervalle d'intégration alors que celui de Stieltjes agit hors de celui-ci.

De ces schémas parallèles j'étais maintenant sur que j'allais déduire la suite des mesures successives et j'eus immédiatement l'intuition que les polynômes orthogonaux allaient réapparaître dans cette écriture. Effectivement on obtient une formule très élégante qui explicite la mesure successive normalisée d'ordre  $n$  quelconque. On peut également écrire facilement la réductrice de cette mesure et obtenir sans peine ses polynômes orthogonaux.

### **Vers Tchebychev.**

Cette suite en place, je me posai naturellement la question d'une éventuelle convergence. Conformément au schéma du point fixe, celle-ci ne pouvait aller que vers une mesure coïncidant avec sa mesure secondaire (à un coefficient de normalisation près). Or j'avais effectué naturellement la recherche d'une telle invariance et trouvé une seule solution à ce problème : la mesure de Tchebychev de deuxième espèce sur un intervalle borné.

Aussitôt je me lançai avec MAPLE sur un programme de visualisation des densités successives avec toute la fébrilité de ma première vérification. Bingo ! Les courbes semblaient épouser et même très vite la forme espérée. Bien sûr si on allait un peu trop loin dans la suite, de grosses distorsions apparaissaient quelquefois sur les bords, et je ne savais pas toujours trancher s'il y avait là simples erreurs d'arrondi où phénomènes plus profonds dus aux zéros des polynômes orthogonaux.

Montrer la convergence effective me sembla comme gravir une falaise abrupte. Je pensai être arrivé là au bout de mes possibilités. Les moyens classiques se révélaient complètement inopérants : Pringsheim, applications contractantes, rien ne marchait ! J'allais tout abandonner et me contenter d'une conjecture quand une fois de plus les moments vinrent me sauver la mise et m'apporter une preuve royale de la convergence complète. C'était le vendredi 13 Octobre 2006, vers une heure du matin.

Maintenant si vous le voulez bien, entrons dans le dédale de cette dernière marche.

## VERS LE SCHEMA ORIGINEL.

### 1. Relation entre les opérateurs des mesures primaires et secondaires.

**1.1.** Rappelons brièvement le résultat clef du chapitre 2, véritable point de départ de la théorie. Si  $\rho$  est une densité de probabilité sur  $[0,1]$  et que l'on sait trouver une mesure positive  $\mu$  sur ce même intervalle telle que les transformées de Stieltjes associées soient couplées par une relation du type  $S_\mu(z) = z - c_1 - \frac{1}{S_\rho(z)}$ , alors les polynômes secondaires  $Q_n$  pour la mesure  $\rho$  deviennent orthogonaux pour la mesure 'secondaire'  $\mu$ .

La démonstration rappelle le utilisation des approximants de Padé de ces transformées de Stieltjes au voisinage de l'infini. On avait ainsi établi que si on note  $P_n$  la famille de polynômes orthonormale pour  $\rho$ ,  $Q_n = T_\rho(P_n)$  les polynômes secondaires, et de même  $(A_n, B_n)$  avec  $A_n$  orthonormale pour  $\mu$  et  $B_n = T_\mu(A_n)$ , alors on a les relations d'approximation

$$\text{suivantes : } \begin{cases} S_\rho(z) - \frac{Q_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)} =_\infty O\left(\frac{1}{z^{2(n+1)}}\right) \\ S_\rho(z) - \frac{A_n(z)}{(z - c_1)A_n(z) - B_n(z)} =_\infty O\left(\frac{1}{z^{2(n+1)}}\right) \end{cases}$$

On en avait déduit la relation de proportionnalité  $A_n(z) = \lambda_n Q_{n+1}(z)$ , ce qui montrait l'orthogonalité des polynômes secondaires  $Q_{n+1}$  pour la mesure  $\mu$ , puis en étudiant l'ajustement des normes on avait vu que  $\lambda_n = 1$  conduisait à des polynômes effectivement unitaires. Nous n'avions pas utilisé à ce moment la coïncidence des dénominateurs.

Le couplage entre les deux mesures est en fait pleinement réalisé dans les deux relations suivantes, valables pour tout entier  $n$ :

$$\boxed{A_n(z) = Q_{n+1}(z) \text{ et } B_n(z) = (z - c_1)Q_{n+1}(z) - P_{n+1}(z)}$$

Or en termes d'opérateurs :  $Q_n = T_\rho(P_n)$  et  $B_n = T_\mu(A_n)$ . L'égalité ci-dessus définissant  $B_n$  peut donc se traduire :  $T_\mu(T_\rho(P_{n+1}(z))) = (z - c_1)T_\rho(P_{n+1}(z)) - P_{n+1}(z)$

On en déduit aussitôt par linéarité, que pour tout polynôme  $P$  de valuation non nulle :

$$\boxed{T_\mu(T_\rho(P(x))) = (x - c_1)T_\rho(P(x)) - P(x)}$$

Il est maintenant naturel de s'interroger sur un passage à la limite dans cette relation.

Par exemple si  $f$  est un élément de  $H$ , c'est-à-dire de carré intégrable pour  $\rho$  et orthogonale à 1, peut on encore écrire  $T_\mu \circ T_\rho(f(x)) = (x - c_1)T_\rho(f(x)) - f(x)$  ?

Cela est vrai dans le cas où la convergence au sens de la norme de la mesure primaire entraîne la convergence au sens de la norme de la mesure secondaire. Vu la relation  $\mu(x) = \frac{\rho(x)}{\pi^+(x)}$

avec  $\pi^+(x) = \frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2 \rho^2(x)$ , cela est assuré si  $\pi^+$  admet un minimum strictement positif sur l'intervalle d'étude, par exemple si  $\rho$  est continue non nulle sur  $I = [0,1]$ .

Il suffit alors de faire jouer la continuité des opérateurs et du produit par  $(x - c_1)$  pour conclure l'égalité par passage à la limite.

Remarquons que l'on peut généraliser à une fonction quelconque de  $L^2([0,1], \rho)$ , non orthogonale à 1, en remplaçant  $f(x)$  par  $f(x) - \int_0^1 f(t)\rho(t)dt$ . On obtient alors la formule :

$$T_\mu \circ T_\rho(f(x)) = (x - c_1)T_\rho(f(x)) - f(x) + \int_0^1 f(x)\rho(x)dx \quad (F)$$

## 1.2. Quelques applications.

Si on choisit  $f(x) = \varphi(x)$  de la mesure d'origine  $\rho$ , on obtient la relation intéressante :

$$T_\mu\left(\frac{\rho(x)}{\mu(x)}\right) = (x - c_1)\frac{\rho(x)}{\mu(x)} - \varphi(x) \quad (F_1)$$

➤ On retrouve par exemple ainsi rapidement que le cas de proportionnalité  $\mu(x) = \lambda\rho(x)$  amène la réductrice  $\varphi(x) = \frac{x - c_1}{\lambda}$ . (Voir mesure de Tchebychev de deuxième forme).

➤ En remarquant que  $T_\mu\left(\frac{\rho(x)}{\mu(x)}\right) = T_1(\rho(x)) - \frac{\rho(x)}{\mu(x)}T_1(\mu(x))$  on obtient l'égalité :

$$\mu(x)T_1(\rho(x)) - \rho(x)T_1(\mu(x)) = (x - c_1)\rho(x) - \mu(x)\varphi(x) \quad (F_2)$$

Par exemple dans le cas de la mesure de Lebesgue ( $\rho = 1$ ) on obtient la formule :

$$\int_0^1 \frac{\ln^2\left(\frac{t}{1-t}\right) - \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)}{(t-x)(\ln^2\left(\frac{t}{1-t}\right) + \pi^2)} dt = (x - \frac{1}{2})\left[\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2\right] - 2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

Voici quelques 'vérifications' M.A.P.L.E :

```
> T:=proc(x)
local t,f,G;
f:=x->(ln(x/(1-x))*ln(x/(1-x)));G:=evalf(int((f(t)-f(x))/((t-x)*(f(t)+Pi^2)),t=0..x))+evalf(int((f(t)-f(x))/((t-x)*(f(t)+Pi^2)),t=x..1));end;
> S:=proc(x)
local h;
h:=evalf((x-1/2)*(ln(x/(1-x))*ln(x/(1-x))+Pi*Pi)-2*ln(x/(1-x)));end;
> T(1/3); -0.3387152081
```

- > **S(1/3)** ; -0.338715209
- > **T(1/sqrt(2))** ; 0.4421993905
- > **S(1/sqrt(2))** ; 0.442199390
- > **T(ln(2)/Pi)** ; -0.6781878573
- > **S(ln(2)/Pi)** ; -0.678187858

### 1.3. Réductrice de la mesure secondaire.

Rappelons que dans le cas des mesures sur  $[0,1]$  la réductrice est donnée par la formule

$$\varphi(x) = 2\rho(x) \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - 2T_1(\rho(x)). \text{ On en déduit } T_1(\rho(x)) = \rho(x) \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{\varphi(x)}{2}$$

Reportée dans l'égalité  $\mu(x)T_1(\rho(x)) - \rho(x)T_1(\mu(x)) = (x - c_1)\rho(x) - \mu(x)\varphi(x)$ , cela nous mène

$$\text{après regroupements à : } \rho(x)\left[\mu(x) \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - T_1(\mu(x))\right] = (x - c_1)\rho(x) - \frac{\mu(x)\varphi(x)}{2}$$

Or la réductrice de  $\mu$  s'écrit  $\psi(x) = 2\mu(x) \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - 2T_1(\mu(x))$ .

On retrouve donc ainsi le lien entre les deux réductrices obtenu au début du chapitre, soit l'égalité :

$$\boxed{\rho(x)\psi(x) + \mu(x)\varphi(x) = 2(x - c_1)\rho(x)}$$

La dualité entre les deux mesures  $\rho$  et  $\mu$  se trouve encore renforcée par l'étude des coefficients de Fourier des réductrices.

### 1.4. Coefficients de Fourier de la réductrice d'une mesure secondaire.

On a vu dans une étude précédente que les coefficients de Fourier d'une réductrice de mesure  $\rho$  par rapport à un système  $P_n$  de polynômes orthonormal pour  $\rho$  étaient donnés par la

$$\text{formule : } C_n(\varphi) = \langle \varphi / P_n \rangle_\rho = \langle T_\rho(\varphi) / T_\rho(P_n) \rangle_\mu = \langle \frac{\rho}{\mu} / Q_n \rangle_\mu = \langle 1 / Q_n \rangle_\rho$$

Si la mesure  $\mu$  est à son tour réductible, les coefficients de Fourier de sa réductrice  $\psi$  par rapport au système orthonormal  $A_n$  décrit précédemment se calculera donc par :

$$C_n(\psi) = \langle 1 / B_n \rangle_\mu \text{ avec } B_n = T_\mu(A_n) \text{ défini on l'a vu par : } B_n(x) = (x - c_1)Q_{n+1}(x) - P_{n+1}(x)$$

$$\text{On aura donc } C_n(\psi) = \langle 1 / B_n \rangle_\mu = \langle x - c_1 / Q_{n+1} \rangle_\mu - \langle 1 / P_{n+1} \rangle_\mu$$

Or pour  $n$  plus grand ou égal à 2,  $Q_{n+1} = A_n$  est orthogonal pour  $\mu$  à tout polynôme de degré au plus égal à 1.

$$\text{Il restera donc pour } \boxed{n \geq 2 : C_n(\psi) = - \langle 1 / P_{n+1} \rangle_\mu}$$

A partir des polynômes orthonormés  $P_{n+1}$  pour  $\rho$  et des moments  $d_n$  de la mesure secondaire  $\mu$  on pourra donc expliciter les coefficients de Fourier de  $\psi$  par rapport aux  $A_n = Q_{n+1}$

### 1.5. Inversion de l'opérateur $T_\rho$ .

La relation fondamentale ( $F$ ) entre les opérateurs  $T_\rho$  et  $T_\mu$  va nous permettre d'inverser l'opérateur  $T_\rho$  d'une manière plus naturelle que celle employée au chapitre 3 paragraphe 4.

Partons de ( $F$ ) :  $T_\mu \circ T_\rho(f(x)) = (x - c_1)T_\rho(f(x)) - f(x) + \int_0^1 f(x)\rho(x)dx$

Rappelons que  $T_\rho(xf(x)) = xT_\rho(f(x)) + \int_0^1 f(x)\rho(x)dx$ . ( $F$ ) peut donc s'écrire sous la forme :

$$T_\mu \circ T_\rho(f(x)) = T_\rho((x - c_1)f(x)) - f(x)$$

Or il est simple de vérifier la commutation de deux opérateurs associés à des mesures positives quelconques  $\rho$  et  $\mu$ . On a en effet par définition même :

$$T_\mu \circ T_\rho(f(x)) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(t)x - tf(x) + tf(u) - uf(t) + uf(x) - xf(u)}{(t-u)(u-x)(x-t)} \rho(u)\mu(t) du dt$$

Le changement  $t \leftrightarrow u$  donne bien  $T_\mu \circ T_\rho(f(x)) = T_\rho \circ T_\mu(f(x))$

On peut donc écrire ( $F$ ) sous la forme :  $T_\rho[(x - c_1)f(x) - T_\mu(f(x))] = f(x)$

Ceci nous donne l'expression :  $T_\rho^{-1}(f(x)) = (x - c_1)f(x) - T_\mu(f(x))$

Ceci sous réserve que  $g(x) = (x - c_1)f(x) - T_\mu(f(x))$  est bien orthogonale à 1 pour  $\rho$ .

Ceci est réalisé si  $f$  est un polynôme car pour tout entier  $n$  :  $(x - c_1)A_n - T_\mu(A_n) = P_{n+1} \perp P_0$

Pour une vérification indirecte montrons que dans le cas où  $\rho$  est réductible de réductrice associée  $\varphi(x)$  on retrouve bien la relation obtenue au chapitre 3, soit :

$$T_\rho^{-1}(f(x)) = \tilde{S} \circ F_{(\mu, \rho)}(f(x)) = \frac{\varphi(x)\mu(x)}{\rho(x)} f(x) - T_\rho\left(\frac{\mu(x)f(x)}{\rho(x)}\right).$$

Il est facile d'établir directement la formule élémentaire :  $T_g\left(\frac{f}{g}\right) = T_1(f) - \frac{f}{g}T_1(g)$ .

On en déduit aussitôt :  $T_\rho\left(\frac{\mu(x)f(x)}{\rho(x)}\right) = T_1(\mu(x)f(x)) - \frac{\mu(x)f(x)}{\rho(x)}T_1(\rho(x))$

Ainsi que  $T_\mu(f(x)) = T_\mu\left(\frac{\mu(x)f(x)}{\mu(x)}\right) = T_1(\mu(x)f(x)) - f(x)T_1(\mu(x))$

Il nous reste donc pour assurer la coïncidence des deux expressions donnant  $T_\rho^{-1}(f(x))$  à vérifier l'égalité où la fonction variable  $f$  n'intervient plus :

$$(x - c_1) + T_1(\mu(x)) = \frac{\mu(x)}{\rho(x)}[\varphi(x) + T_1(\rho(x))].$$

Or cette égalité est directement équivalente à la formule ( $F_2$ ) obtenue un peu plus haut.

$$(F_2) : \mu(x)T_1(\rho(x)) - \rho(x)T_1(\mu(x)) = (x - c_1)\rho(x) - \mu(x)\varphi(x)$$

On retiendra donc la formule pratique d'inversion : Si  $\int_0^1 g(x)\rho(x)dx = 0$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \rho(t) dt \Leftrightarrow g(x) = (x - c_1)f(x) - \int_0^1 \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \mu(t) dt$$

## 2. Matrices circulantes infinies reliées aux moments.

On verra au chapitre suivant une étude de l'action de  $T$  sur des séries entières dans le cas de la mesure de Lebesgue. On peut en fait généraliser facilement à une mesure quelconque et considérer  $T_\rho$  comme opérant sur un espace de séries formelles à coefficients réels.

En effet, sous réserve des vérifications de convergence on obtient pour  $f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n x^n$ ,

$$T_\rho(f(x)) = g(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} v_n x^n \text{ avec } \boxed{v_n = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k u_{n+k+1} = \sum_{k=n+1}^{k=\infty} u_k c_{k-1-n}} \quad (R)$$

On peut alors introduire la matrice infinie notée  $A_\rho$  dont le coefficient générique est

$$a_{(i,j)} = c_{j-i-1} \text{ avec la convention : } c_n = 0 \text{ si } n < 0.$$

Si on note  $U$  le vecteur colonne infini de terme général  $n \mapsto u_n$  et  $V$  celui de terme général  $n \mapsto v_n$ , la relation (R) ci-dessus s'interprète alors comme  $\boxed{V = A_\rho \times U}$ , avec

$$A_\rho = \begin{pmatrix} 0 & c_0 & c_1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & c_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \text{ matrice circulante infinie, directement liée aux moments de } \rho.$$

L'inversion de  $T_\rho$  a déjà été largement abordée dans les chapitres précédents, sous différentes formes. Privilégions ici la formule  $\boxed{f(x) = (x - c_1)g(x) - T_\mu(g(x))}$  avec  $\mu$  mesure secondaire de  $\rho$ . Elle donne parmi les séries entières antécédents de  $g$ , celle d'intégrale nulle pour  $\rho$ .

Cela se traduit sur les deux suites en question par la relation d'inversion :

$$\boxed{u_n = v_{n-1} - c_1 v_n - \sum_{j=0}^{j=\infty} d_j v_{j+n+1}} \quad (R') \text{ valable pour tout } n \text{ avec la convention } v_{-1} = 0$$

On peut en fait vérifier directement que  $A_\rho \times U = V$  en utilisant uniquement les liens bien connus entre les moments  $c_n$  et  $d_n$ .

Il nous faut montrer que  $\sum_{k=n+1}^{k=\infty} [v_{k-1} - c_1 v_k - \sum_{j=0}^{j=\infty} d_j v_{j+k+1}] c_{k-1-n} = v_n$ , c'est-à-dire :

$$\sum_{k=n+1}^{k=\infty} v_{k-1} c_{k-1-n} - c_1 \sum_{k=n+1}^{k=\infty} v_k c_{k-1-n} - \sum_{k=n+1}^{k=\infty} \left( \sum_{j=0}^{j=\infty} d_j c_{k-1-n} \right) v_{j+k+1} = v_n. \text{ après simplifications évidentes :}$$

$$\sum_{k=n+3}^{k=\infty} v_{k-1} c_{k-1-n} - c_1 \sum_{k=n+2}^{k=\infty} v_k c_{k-1-n} - \sum_{k=n+1}^{k=\infty} \left( \sum_{j=0}^{j=\infty} d_j c_{k-1-n} \right) v_{j+k+1} = 0, \text{ ce qui peut s'écrire :}$$

$$\sum_{q=n+2}^{q=\infty} \left( c_{q-n} - c_1 c_{q-n-1} - \sum_{k=n+1}^{k=q-1} c_{k-1-n} d_{q-k-1} \right) v_q = 0 \text{ ou } \sum_{q=n+2}^{q=\infty} \left( c_{q-n} - c_1 c_{q-n-1} - \sum_{i=0}^{i=q-n-2} c_i d_{q-i-n-2} \right) v_q = 0$$

Rappelons nous alors la relation classique  $c_{p+2} - c_1 c_{p+1} = \sum_{i=0}^{i=p} c_i d_{p-i}$ .

Appliquée à  $p = q - n - 2$  elle donne bien immédiatement l'annulation de chacun des coefficients affectant  $v_q$ . La même relation permet de vérifier  $\sum_{k=0}^{k=\infty} u_k c_k = 0$

En effet :  $\sum_{k=0}^{k=\infty} u_k c_k = \sum_{k=0}^{k=\infty} [v_{k-1} - c_1 v_k - \sum_{j=0}^{j=\infty} d_j v_{j+k+1}] c_k$ , ce que l'on peut écrire :

$$\sum_{q=0}^{q=\infty} \left( c_{q+1} - c_1 c_q - \sum_{k=0}^{k=q-1} c_k d_{q-k-1} \right) v_q = 0 \quad \text{car} \quad c_{q+1} - c_1 c_q = \sum_{i=0}^{i=q-1} c_i d_{q-i-1}$$

Si on revient à l'écriture matricielle, définissons  $I$  matrice identique infinie de termes diagonaux constants égaux à 1, tous les autres étant nuls, et  $S$  matrice de shift définie par :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (\text{Elle décale } U \text{ en } S \times U = \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}).$$

Avec ces éléments la formule d'inversion  $u_n = v_{n-1} - c_1 v_n - \sum_{j=0}^{j=\infty} d_j v_{j+k+1}$  ( $R'$ ) se traduit

simplement par :  $U = (S - c_1 I - A_\mu) \times V$ , en notant  $A_\mu$  la matrice circulante associée aux moments de la mesure secondaire  $\mu$ . Ceci étant vrai pour tout vecteur colonne infini on peut en déduire la relation produit traduisant l'inversion à droite de la matrice  $A_p$  :

$$A_p \times (S - c_1 I - A_\mu) = I$$

L'inversion à gauche ne marche bien sûr pas puisque  $(S - c_1 I - A_\mu) \times A_p \times U = U - \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n c_n \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

On peut poursuivre cette étude matricielle en considérant l'espace noté  $l^2(\rho)$  des suites

$n \mapsto u_n$  telles que  $\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n^2 c_{2n}$  converge muni du produit scalaire  $\langle u/v \rangle_\rho = \sum_{i=0}^{i=\infty} \sum_{j=0}^{j=\infty} u_i v_j c_{i+j}$

Celui-ci est parfaitement défini car d'après Cauchy Schwartz :  $|c_{i+j}| \leq \sqrt{c_{2i}} \sqrt{c_{2j}}$

On en déduit  $|u_i v_j c_{i+j}| \leq |u_i \sqrt{c_{2i}}| \times |v_j \sqrt{c_{2j}}| \leq \frac{1}{2} (u_i^2 c_{2i} + v_j^2 c_{2j})$ . La famille  $(i, j) \mapsto u_i v_j c_{i+j}$  est donc bien sommable.



Sur cet espace, le caractère isométrique de  $T_\rho$  va se traduire lorsqu'on considère deux éléments  $x$  et  $y$  de  $l^2(\rho)$  par :  $\langle x/y \rangle_\rho - \langle x/\widehat{1} \rangle_\rho \times \langle y/\widehat{1} \rangle_\rho = \langle A_\rho(x)/A_\rho(y) \rangle_\mu$  (F) en notant  $\widehat{1} = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ . Ici encore on peut vérifier directement cette égalité à partir des relations fondamentales entre les deux séries de moments.

Commençons par remarquer  $\langle x/\widehat{1} \rangle_\rho = \sum_{n=0}^{n=\infty} x_n c_n$ . Le premier membre de l'égalité à établir s'écrit

donc en simplifiant les sommations :  $\sum_{(k,q)} x_k y_q (c_{k+q} - c_k c_q)$ .

Le produit scalaire du second membre s'obtient à partir des coefficients  $d_n$  et en utilisant l'action de l'opérateur  $A_\rho$  examiné précédemment. Cela conduit à :

$$\sum_{(i,j)} \left( \sum_{k=i+1}^{k=\infty} x_k c_{k-1-i} \right) \left( \sum_{q=j+1}^{q=\infty} y_q c_{q-1-j} \right) d_{i+j} = \sum_{(k,q)} \left( \sum_{i=0}^{i=k-1} \sum_{j=0}^{j=q-1} c_{k-1-i} c_{q-1-j} d_{i+j} \right) x_k y_q$$

On conclut alors par la relation  $c_{k+q} - c_k c_q = \sum_{i=0}^{i=k-1} \sum_{j=0}^{j=q-1} c_i c_j d_{k+q-2-i-j}$

Traduisons maintenant matriciellement l'égalité (F).

Notons  $G_\rho$  la matrice de Gram de la base canonique de  $l^2(\rho)$  relativement au produit scalaire défini plus haut. Son coefficient générique est naturellement  $(i, j) \mapsto c_{i+j}$ . On définit de même  $G_\mu$  matrice de Gram pour  $\mu$ . Notons enfin  $C_\rho$  la matrice uni colonne infinie de coefficient générique  $i \mapsto c_i$ . On peut alors synthétiser (F) par la relation matricielle :

$$\boxed{G_\rho - C_\rho \times^t C_\rho = {}^t A_\rho G_\mu A_\rho}$$

La dualité entre la matrice de Gram relative à  $\mu$  et la matrice de covariance liée à  $\rho$  apparaît ainsi de manière lumineuse.

### 3. Mesures secondaires successives.

3.1. Rappelons que à partir d'une mesure de probabilité  $\rho$  sur le segment  $[0,1]$  de réductrice associée  $\varphi$ , on peut construire une mesure secondaire  $\mu$ , de réductrice associée définie par

$$\psi(x) = 2(x - c_1) - \frac{\varphi(x)\mu(x)}{\rho(x)}. \text{ On sait également que } S_\mu(z) = z - c_1 - \frac{1}{S_\rho(z)}$$

Si on 'normalise'  $\mu$  en posant  $\rho_1 = \frac{\mu}{d_0}$  avec  $d_0 = c_2 - (c_1)^2$ , on obtient une nouvelle densité de

$$\text{probabilité définie par } \rho_1(x) = \frac{1}{d_0} \left[ \frac{\rho(x)}{\frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2 \rho^2(x)} \right].$$

Sa transformée de Stieltjes est  $S_{\rho_1}(z) = \frac{1}{d_0} \left[ z - c_1 - \frac{1}{S_\rho(z)} \right]$  et sa réductrice s'explique

$$\text{comme : } \varphi_1(x) = \frac{1}{d_0} \left[ 2(x - c_1) - \frac{\varphi(x)}{\frac{\varphi^2(x)}{4} + \pi^2 \rho^2(x)} \right]$$

On peut alors construire à partir de  $\rho_1$  une mesure secondaire normalisée  $\rho_2$ , puis définir de même  $\rho_3$  à partir de  $\rho_2$  et ainsi de suite. On voit donc apparaître une séquence de mesures secondaires normalisées successives que nous noterons  $n \mapsto \rho_n$ , construite à partir de  $\rho_0 = \rho$ , et telle que  $\rho_{n+1}$  soit la mesure secondaire normalisée déduite de  $\rho_n$ . On notera naturellement  $\varphi_n$  la réductrice associée à  $\rho_n$ , et  $S_n(z)$  la transformée de Stieltjes de  $\rho_n$ .

Nous adopterons aussi la convention d'écriture suivante concernant les moments :

$$\boxed{c_1^n = \int_0^1 x \rho_n(x) dx ; c_2^n = \int_0^1 x^2 \rho_n(x) dx \text{ et } d_0^n = c_2^n - (c_1^n)^2}$$

Ceci étant précisé, nous pouvons écrire les formules de passage suivantes :

$$S_{n+1}(z) = \frac{1}{d_0^n} \left[ z - c_1^n - \frac{1}{S_n(z)} \right] \text{ et } \begin{cases} \rho_{n+1}(x) = \frac{1}{d_0^n} \left[ \frac{\rho_n(x)}{\frac{\varphi_n^2(x)}{4} + \pi^2 \rho_n^2(x)} \right] \\ \varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{d_0^n} \left[ 2(x - c_1^n) - \frac{\varphi_n(x)}{\frac{\varphi_n^2(x)}{4} + \pi^2 \rho_n^2(x)} \right] \end{cases}$$

Si on se souvient des démonstrations du chapitre 2 utilisant les formules d'inversion de

Stieltjes-Perron, il est naturel d'introduire la quantité complexe  $\boxed{Z_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{2} + i\pi\rho_n(x)}$

Les formules de passage se synthétisent alors sous les deux formes similaires suivantes :

$$\boxed{S_{n+1}(z) = \frac{1}{d_0^n} \left[ z - c_1^n - \frac{1}{S_n(z)} \right]} \text{ et } \boxed{Z_{n+1}(x) = \frac{1}{d_0^n} \left[ x - c_1^n - \frac{1}{Z_n(x)} \right]}$$

On va voir que cette suite de densités nous permet de retrouver la suite double des polynômes primaires et secondaires attachées à la mesure initiale  $\rho$ , et ceci par l'intermédiaire des réduites de la transformée de Stieltjes  $S_\rho(z)$ .

On reconnaît en effet dans les formules de passage un schéma de fractions continues. Il suffit d'inverser l'égalité qui se présente alors sous la forme  $S_n(z) = \frac{1}{z - c_1^n - d_0^n S_{n+1}}$

$$\text{Ainsi : } S_\rho(z) = S_0 = \frac{1}{z - c_1^0 - \frac{d_0^0}{z - c_1^1 - \frac{d_0^1}{z - c_1^2 - \frac{d_0^2}{z - \dots - \frac{d_0^{n-1}}{z - c_1^{n-1} - \frac{d_0^n}{z - c_1^n - d_0^n S_{n+1}}}}}}}$$

On sait alors que : 
$$S_\rho(z) = \frac{u_n(-d_0^n S_{n+1}) + u_{n+1}}{v_n(-d_0^n S_{n+1}) + v_{n+1}}$$

Avec  $(u_n, v_n)$  construit de proche en proche à partir des sources  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}; \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = z - c_1^0 \end{cases}$

à l'aide des relations classiques : 
$$\begin{cases} u_{n+1} = (z - c_1^n)u_n - d_0^{n-1}u_{n-1} \\ v_{n+1} = (z - c_1^n)v_n - d_0^{n-1}v_{n-1} \end{cases}$$

On sait aussi par la théorie des fractions continues, que le déterminant  $\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} u_{n+1} & v_{n+1} \\ u_n & v_n \end{vmatrix}$  se simplifie en :  $\Delta_{n+1} = d_0^0 d_0^1 \dots d_0^{n-1}$ . On en déduit aussitôt que :

$$S_\rho(z) - \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{S_{n+1}(d_0^0 d_0^1 \dots d_0^n)}{v_{n+1}(v_{n+1} - d_0^n v_n S_{n+1})}$$

Etudions alors cette différence au voisinage de l'infini.

- On sait que  $S_{n+1} = S_{\rho_{n+1}}(z)$  est équivalent à  $\frac{1}{z}$ . (On a normalisé toutes les mesures  $\rho_n$ )
- $v_{n+1}$  est de manière évidente un polynôme en  $z$  de terme dominant  $z^{n+1}$ .

On en déduit qu'au voisinage de l'infini :  $S_\rho(z) - \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$  est équivalent à  $\frac{d_0^0 d_0^1 \dots d_0^n}{z^{2n+3}}$

Or  $u_{n+1}$  est de degré  $n$  et  $v_{n+1}$  de degré  $n+1$ . On peut donc conclure que la fraction rationnelle

$$F_n(z) = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$$

est un approximant de Padé de  $S_\rho(z)$  de type  $[n / n+1]$  au voisinage de l'infini.

Il s'ensuit que cette fraction coïncide avec le quotient classique  $\frac{Q_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}$  du polynôme secondaire d'ordre  $n+1$  relatif à  $\rho$  par le polynôme orthogonal primaire  $P_{n+1}$

On a donc la proportionnalité  $v_n = \lambda_n P_n(z)$  et  $u_n = \lambda_n Q_n(z)$ .

Si on résume tout cela, on voit apparaître un algorithme assez élégant de construction des polynômes primaires et secondaires à partir de la seule famille des moments.

Le programme MAPLE suivant illustre la méthode dans le cas de la mesure de Lebesgue.

```
> Coff1:=proc(S)
local t,c;
c:=limit(t^2*(S(t)-1/t),t=infinity);end ;

> Coff2:=proc(S)
local t,c;
c:=limit(t^3*(S(t)-1/t-Coff1(S)/t^2),t=infinity);end ;

> s0:=sum(1/((n+1)*z^(n+1)),n=0..10):
> S:=unapply(s0,z);
S:=z -> 1/z + 1/2 z^2 + 1/3 z^3 + 1/4 z^4 + 1/5 z^5 + 1/6 z^6 + 1/7 z^7 + 1/8 z^8 + 1/9 z^9 + 1/10 z^10 + 1/11 z^11

> Trans:=proc(S)
local c1,c2,d,T;
c1:=Coff1(S);c2:=Coff2(S);d:=c2-(c1)^2;
T:=simplify((1/d)*(z-c1-1/S(z)));T:=unapply(T,z);end;
>
> u[0]:=0:u[1]:=1:v[0]:=1:v[1]:=z-Coff1(S):for k from 1 to 5 do
c1:=Coff1(S):c2:=Coff2(S):d:=c2-(c1)^2:
u[k+1]:=simplify((z-c1)*u[k]-d*u[k-1]);v[k+1]:=simplify((z-
c1)*v[k]-d*v[k-1]);S:=Trans(S):od;
```

$$u_2 := z - \frac{1}{2} \quad v_2 := z^2 - z + \frac{1}{6}$$

$$u_3 := z^2 - z + \frac{11}{60} \quad v_3 := z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{5}z - \frac{1}{20}$$

$$u_4 := z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{13}{21}z - \frac{5}{84} \quad v_4 := z^4 - 2z^3 + \frac{9}{7}z^2 - \frac{2}{7}z + \frac{1}{70}$$

$$u_5 := z^4 - 2z^3 + \frac{47}{36}z^2 - \frac{11}{36}z + \frac{137}{7560} \quad v_5 := z^5 - \frac{5}{2}z^4 + \frac{20}{9}z^3 - \frac{5}{6}z^2 + \frac{5}{42}z - \frac{1}{252}$$

$$u_6 := z^5 - \frac{5}{2}z^4 + \frac{74}{33}z^3 - \frac{19}{22}z^2 + \frac{29}{220}z - \frac{7}{1320}$$

$$v_6 := z^6 - 3z^5 + \frac{75}{22}z^4 - \frac{20}{11}z^3 + \frac{5}{11}z^2 - \frac{1}{22}z + \frac{1}{924}$$

### 3.2. Calcul des coefficients $d_0^n$ .

La théorie des réduites de la transformée de Stieltjes de  $\rho$  nous dit que si pour une famille de polynômes orthogonaux  $n \mapsto P_n(x)$  de polynômes secondaires associés  $Q_n(x)$ , on a au

voisinage de l'infini :  $S_\rho(z) - \frac{Q_n(z)}{P_n(z)}$  équivalent à  $\frac{\gamma_n}{z^{2n+1}}$  avec  $\gamma_n = \frac{\gamma_0 a_0^2}{a_n^2} \times \frac{\|P_n\|^2}{\|P_0\|^2}$ , expression

dans laquelle  $a_n$  représente le coefficient dominant de  $P_n$ . ( $\gamma_n = \frac{1}{a_n} \int_0^1 t^n P_n(t) \rho(t) dt$ ).

Si on compare avec l'équivalence obtenue dans le paragraphe précédent, on en déduit l'égalité

$$d_0^0 d_0^1 \dots d_0^{n-1} = \frac{\gamma_0 a_0^2}{a_n^2} \times \frac{\|P_n\|^2}{\|P_0\|^2} \text{ dont on tire aussitôt : } d_0^n = \frac{a_n^2 \|P_{n+1}\|^2}{a_{n+1}^2 \|P_n\|^2}$$

- Si les polynômes orthogonaux en question sont normés, donc définis par une relation de récurrence d'ordre 3 du type  $xP_n(x) = t_n P_{n+1}(x) + s_n P_n(x) + t_{n-1} P_{n-1}(x)$ , on a alors l'égalité

$$\text{parfaite } \boxed{d_0^n = (t_n)^2}. \text{ (on se rappelle que } t_{n-1} = \frac{a_{n-1} \|P_n\|^2}{a_n \|P_{n-1}\|^2} \text{)}$$

Par exemple dans le cas de la mesure de Lebesgue sur  $[0,1]$ , on a  $t_n = \frac{(n+1)}{2\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}$ , le

programme MAPLE invoqué plus haut confirme bien  $d_0^n = \frac{(n+1)^2}{4(2n+1)(2n+3)}$

- Si les polynômes orthogonaux ont un terme dominant égal à 1. (c'est le cas des polynômes  $x \mapsto v_n(x)$  apparaissant dans la séquence des mesures secondaires successives, on a

$$\text{alors : } \boxed{d_0^n = \frac{\|P_{n+1}\|^2}{\|P_n\|^2}}.$$

En couplant les deux raisonnements et connaissant les relations de récurrence pour les polynômes classiques on peut en déduire la norme des polynômes  $x \mapsto v_n(x)$ .

Par exemple dans le cas précis de la mesure de Lebesgue, on obtient  $\|v_n\| = \frac{1}{(\sqrt{2n+1})C_{2n}^n}$

### 3.3. Explicitation des mesures et réductrices successives.

Les coefficients  $d_0^n$  pouvant être explicités comme on vient de le voir, et vu la similitude des formules de passage, il est donc possible de donner une expression directe de  $Z_0(x)$  en fonction de  $Z_{n+1}(x)$ . En effet en appliquant le même schéma de fractions continues que celui employé pour les transformées de Stieltjes, il vient naturellement :

$$Z_0(x) = \frac{u_{n+1}(x) - d_0^n u_n(x) Z_{n+1}(x)}{v_{n+1}(x) - d_0^n v_n(x) Z_{n+1}(x)} \text{ d'où l'on tire : } \boxed{Z_n(x) = \frac{v_n(x) Z_0(x) - u_n(x)}{d_0^{n-1} (v_{n-1}(x) Z_0(x) - u_{n-1}(x))}}$$

Si on note  $n \mapsto P_n(x)$  une suite orthonormée de polynômes pour  $\rho$  on peut alors écrire suivant les notations précédentes les égalités  $v_n(x) = \lambda_n P_n(x)$  et  $u_n(x) = \lambda_n Q_n(x)$  avec  $|\lambda_n| = \|v_n\|$ . On en déduit immédiatement en notant  $\varepsilon_n$  le signe de  $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}$  :

$$Z_n(x) = \varepsilon_n \frac{\|v_n\|}{\|v_{n-1}\|} \times \frac{P_n(x)Z_0(x) - Q_n(x)}{d_0^{n-1}(P_{n-1}(x)Z_0(x) - Q_{n-1}(x))}. \text{ Or } d_0^n = \frac{\|v_{n+1}\|^2}{\|v_n\|^2}. \text{ On conclut donc :}$$

$$Z_n(x) = \frac{1}{\sqrt{d_0^{n-1}}} \times \frac{P_n(x)Z_0(x) - Q_n(x)}{(P_{n-1}(x)Z_0(x) - Q_{n-1}(x))}. \text{ De } Z_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{2} + i\pi\rho_n(x) \text{ on déduit enfin :}$$

$$\rho_n(x) = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{d_0^{n-1}}} \times \frac{\rho(x)(P_{n-1}(x)Q_n(x) - P_n(x)Q_{n-1}(x))}{(P_{n-1}(x)\frac{\varphi(x)}{2} - Q_{n-1}(x))^2 + \pi^2\rho^2(x)P_{n-1}^2(x)}$$

$$\varphi_n(x) = \frac{2\varepsilon_n}{\sqrt{d_0^{n-1}}} \times \frac{(P_n(x)\frac{\varphi(x)}{2} - Q_n(x)) \times (P_{n-1}(x)\frac{\varphi(x)}{2} - Q_{n-1}(x)) + \pi^2\rho^2(x)P_n(x)P_{n-1}(x)}{(P_{n-1}(x)\frac{\varphi(x)}{2} - Q_{n-1}(x))^2 + \pi^2\rho^2(x)P_{n-1}^2(x)}$$

Or la théorie des fractions continues nous a donné précédemment la valeur du déterminant :

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} u_{n+1}(x) & v_{n+1}(x) \\ u_n(x) & v_n(x) \end{vmatrix} = d_0^0 d_0^1 \dots d_0^{n-1} \text{ On en déduit facilement après simplifications :}$$

$$\lambda_n \lambda_{n+1} (Q_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)Q_n(x)) = \frac{\|v_n\|^2}{\|v_0\|^2} = \|v_n\|^2. \text{ Or } |\lambda_n| = \|v_n\|. \text{ Ceci nous donne}$$

$$|Q_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)Q_n(x)| = \frac{\|v_n\|}{\|v_{n+1}\|} = \frac{1}{\sqrt{d_0^n}}.$$

Un simple décalage d'indice donne enfin, en se rappelant que les densités sont positives :

$$\rho_n(x) = \frac{1}{d_0^{n-1}} \times \frac{\rho(x)}{(P_{n-1}(x)\frac{\varphi(x)}{2} - Q_{n-1}(x))^2 + \pi^2\rho^2(x)P_{n-1}^2(x)}$$

Belle formule, non ?

Comme toutes ces mesures sont des densités de probabilité on en déduit que pour tout entier  $n$

$$\int_0^1 \frac{\rho(x)dx}{[P_n(x)\frac{\varphi(x)}{2} - Q_n(x)]^2 + \pi^2\rho^2(x)P_n^2(x)} = d_0^n.$$

### 3.4. Quelques applications numériques :

- Pour la mesure de Lebesgue sur  $[0,1]$  :

$$\int_0^1 \frac{dx}{[P_n(x) \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - Q_n(x)]^2 + \pi^2 P_n^2(x)} = \frac{(n+1)^2}{4(2n+1)(2n+3)}$$

- Pour les polynômes de Laguerre : ( $\rho(x) = e^{-x}$  sur  $[0,+\infty[$ )

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{[P_n(x) e^{-x} (Ei(1,-x) + i\pi) + Q_n(x)]^2 + \pi^2 e^{-2x} P_n^2(x)} = (n+1)^2$$

- Pour les polynômes d'Hermite. ( $\rho(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$  sur la droite réelle)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x) dx}{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t \ln|x-t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) P_n(x) + Q_n(x)\right]^2 + \pi^2 \rho^2(x) P_n^2(x)} = n+1$$

- Pour la mesure de Tchebychev de 2<sup>ieme</sup> forme. ( $\rho(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}$  sur  $[-1,1]$ )

On a vu dans une étude antérieure que la mesure secondaire non normalisée est égale au quart de la mesure initiale. On en déduit donc que la séquence des densités secondaires normalisées est constante égale à  $\rho$ . On en déduit l'intéressante égalité sur les polynômes orthogonaux relatifs à cette mesure : Pour tout entier  $n$  distinct de 0 :

$$P_n^2(x) - P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) = 1$$

### 3.5. Sur la propriété d'isométrie.

Vu la 'normalisation' effectuée pour ramener les mesures secondaires successives à des densités de probabilité, le caractère isométrique des transformations  $T$  associées est perdu. Si on note  $H_n$  l'ensemble des éléments de  $L^2([0,1],\rho_n)$  orthogonaux à 1, c'est l'application

$\sqrt{d_0^n} \times T_{\rho_n}$  qui est alors une isométrie de  $(H_n, \rho_n)$  vers  $(L^2([0,1], \rho_{n+1}))$

On aura donc pour tout couple  $(f,g)$  de  $L^2([0,1],\rho_n)$  :

$$\langle f/g \rangle_{\rho_n} - \langle f/1 \rangle_{\rho_n} \times \langle g/1 \rangle_{\rho_n} = d_0^n \langle T_{\rho_n}(f)/T_{\rho_n}(g) \rangle_{\rho_{n+1}}$$

On va maintenant généraliser cette formule en composant les isométries engendrées par la séquence de mesures secondaires.

Commençons par poser  $F_n = T_{\rho_n} \circ T_{\rho_{n-1}} \circ \dots \circ T_{\rho_1} \circ T_{\rho_0}$ . (On pose  $\rho_0 = \rho$  et donc  $F_0 = T_{\rho}$ )

Il est facile d'établir par récurrence la formule suivante :

$$F_n(f)(t_{n+1}) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{k=n+1} \frac{f(t_k)}{\prod_{j \neq k} (t_k - t_j)} \right) \rho_0(t_0) \dots \rho_n(t_n) dt_0 \dots dt_n .$$

(Intégrale multiple d'ordre  $n+1$ )

➤ Prenons un couple  $(f, g)$  d'éléments de  $L^2([0,1], \rho)$  tel que  $g \perp P_0$ .

On peut alors écrire  $\langle f/g \rangle_{\rho_0} = \langle T_{\rho_0}(f)/T_{\rho_0}(g) \rangle_{\mu} = d_0^0 \langle F_0(f)/F_0(g) \rangle_{\rho_1}$

➤ Supposons que de plus  $g$  soit orthogonal à  $P_1$ , toujours dans  $L^2([0,1], \rho)$ . On en déduit que  $F_0(g)$  est orthogonal à 1 dans  $L^2([0,1], \rho_1)$  et on peut enchaîner par l'égalité :

$$\langle f/g \rangle_{\rho_0} = d_0^0 d_0^1 \langle F_1(f)/F_1(g) \rangle_{\rho_2}$$

➤ On généralise facilement si  $g$  est orthogonal au système  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  dans  $L^2([0,1], \rho)$ .

On obtient :  $\boxed{\langle f/g \rangle_{\rho_0} = d_0^0 d_0^1 \dots d_0^n \langle F_n(f)/F_n(g) \rangle_{\rho_{n+1}}}$

Cette formule nous permet par exemple d'exprimer les coefficients de Fourier d'une fonction donnée  $f$  relativement au système orthonormé  $(P_0, \dots, P_n, \dots)$  en tant qu'intégrales multiples.

En effet puisque  $P_n \perp P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  on pourra écrire :

$$C_n(f) = \langle f/P_n \rangle_{\rho_0} = d_0^0 \dots d_0^{n-1} \langle F_{n-1}(f)/F_{n-1}(P_n) \rangle_{\rho_n}$$

Or il est clair, puisque toutes les mesures sont des densités de probabilité, que  $F_{n-1}(P_n) = a_n$

(Coefficient dominant de  $P_n$ ). On conclût donc facilement :

$$C_n(f) = d_0^0 \dots d_0^{n-1} a_n \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f(t_k)}{\prod_{j \neq k} (t_k - t_j)} \right) \rho_0(t_0) \dots \rho_n(t_n) dt_0 \dots dt_n , \text{ intégrale d'ordre } n+1.$$

Or on sait que  $d_0^0 \dots d_0^{n-1} = \frac{\gamma_0 a_0^2}{a_n^2} \times \frac{\|P_n\|^2}{\|P_0\|^2} = \frac{1}{a_n^2}$  dans le cas d'un système orthonormé. Ainsi :

$$\boxed{C_n(f) = \frac{1}{a_n} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f(t_k)}{\prod_{j \neq k} (t_k - t_j)} \right) \rho_0(t_0) \dots \rho_n(t_n) dt_0 \dots dt_n}$$



### 3.6. Une conjecture de convergence.

A ce stade de l'étude une question fondamentale s'impose, quel est le comportement de ces densités successives à l'infini ? Chacune étant la mesure secondaire normalisée de la précédente, il semble intuitivement que si une convergence se dessine, elle doit conduire à une mesure invariante par le passage à la mesure secondaire, selon un schéma classique de point fixe.

Or il existe une seule mesure sur  $[0,1]$  invariante pour cette opération et nous l'avons étudié dans un paragraphe précédent.

Il s'agit d'une mesure de Tchebychev de deuxième forme, de densité  $x \mapsto \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$  (en prenant pour support  $[-1,1]$ ). Si on prend pour support l'intervalle standard  $[0,1]$ , on obtient la mesure de densité  $x \mapsto \rho_t(x) = \frac{8}{\pi}\sqrt{x(1-x)}$ .

L'étude expérimentale avec MAPLE sur des mesures diverses semble confirmer cette intuition. Apparaît cependant un phénomène voisin de celui de Gibbs pour les séries de Fourier au voisinage des bornes. Suivant les exemples l'approche a l'air meilleure sur un des deux demi intervalles  $]0, \frac{1}{2}]$  ou  $[\frac{1}{2}, 1[$  que sur l'autre. Cependant il se peut qu'il s'agisse là de phénomènes fictifs dus au calcul et la représentation MAPLE. (Mon programme est très rudimentaire).

Tout ceci demande à être confirmé par une étude rigoureuse. Notons simplement que si ce point est établi, moyennant certainement des conditions de régularité sévères sur la mesure  $\rho$ , cela pourra se traduire vu la formule définissant  $\rho_n$  par l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_0^n \left[ (P_n(x) \frac{\rho(x)}{2} - Q_n(x))^2 + \pi^2 \rho^2(x) P_n^2(x) \right] = \frac{\pi \rho(x)}{8\sqrt{x(1-x)}}$$

On trouvera dans les pages qui suivent une étude MAPLE de cette convergence.

On y verra en particulier les procédures permettant de retrouver une famille orthonormée de polynômes à partir de la transformée de Stieltjes.

**Epilogue.** Après ces analyses de courbe et mes essais infructueux d'établir une convergence simple de  $n \mapsto \rho_n(x)$ , je suis revenu à l'esprit probabiliste et envisagé l'angle de la convergence faible, c'est-à-dire ici de l'évolution des moments. Comme dans le tout premier résultat de mon étude, les relations de récurrence interviennent de façon remarquable et donnent des conditions élémentaires assurant la convergence effective. Voici la preuve détaillée.

### 3.7. Convergence faible de la suite des densités secondaires normalisées.

Nous considérons ici la relation classique de récurrence mettant en jeu trois polynômes orthogonaux normés successifs écrite :  $xP_n(x) = t_n P_{n+1}(x) + s_n P_n(x) + t_{n-1} P_{n-1}(x)$  (1)

On a déjà remarqué précédemment que le coefficient de normalisation  $d_0^n$  intervenant dans le calcul des densités en cascade n'est autre que  $d_0^n = (t_n)^2$ . En poussant plus loin la comparaison du schéma de fractions continues apparaissant dans cette descente et celui classique déduit de la relation de récurrence ci-dessus il apparaît de manière évidente que le coefficient  $c_1^n$  intervenant dans notre processus n'est autre que  $c_1^n = s_n$ .

Montrons rapidement cela : On se rappelle que les polynômes  $v_n(x)$  intervenant sont générés par la relation :  $v_{n+1}(x) = (x - c_1^n)v_n(x) - d_0^{n-1}v_{n-1}(x)$ . (2)

On se rappelle aussi que ces polynômes orthogonaux ne sont pas normés mais de coefficient dominant égal à 1 et sont reliés aux polynômes orthogonaux normés  $P_n$  par  $v_n = \lambda_n P_n$  avec  $|\lambda_n| = \|P_n\|$ . On peut alors écrire la relation (2) comme une relation de récurrence sur les  $P_n$ ,

$$\text{soit : } xP_n(x) = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} P_{n+1}(x) + c_1^n P_n(x) + \frac{d_0^{n-1} \lambda_{n-1}}{\lambda_n} P_{n-1}(x) \quad (3)$$

La comparaison de (1) et (3) nous donne alors  $c_1^n = s_n$  ainsi que  $t_n = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$  et  $t_{n-1} = \frac{d_0^{n-1} \lambda_{n-1}}{\lambda_n}$

(Ces deux dernières égalités nous redonnent  $d_0^n = (t_n)^2$  )

Nous sommes maintenant en mesure de donner une condition suffisante et nécessaire de la convergence faible de la suite des densités  $n \mapsto \rho_n$

**Théorème** : Pour que la suite de densités secondaires normalisées converge faiblement, il est nécessaire et suffisant d'avoir les deux conditions limites suivantes sur les coefficients des relations de récurrence à trois termes :  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \frac{1}{4}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{2}$ . La suite  $n \mapsto \rho_n$  converge alors vers la mesure de Tchebychev de 2<sup>ème</sup> espèce  $x \mapsto \rho_{tch}(x) = \frac{8\sqrt{x(1-x)}}{\pi}$

La formule clef de passage d'une mesure de probabilité  $\rho$  à sa mesure secondaire  $\mu$  est celle du couplage des transformées de Stieltjes :  $S_\mu(z) = z - c_1 - \frac{1}{S_\rho(z)}$ .

On rappelle que si on note  $c_n$  et  $d_n$  les moments respectifs d'ordre  $n$  de  $\rho$  et  $\mu$ , on a les

relations évidentes : Pour tout  $n$   $d_n = c_{n+2} - c_1 c_{n+1} - \sum_{j=0}^{j=n-1} d_j c_{n-j}$ .

Lorsqu'on ramène  $\mu$  à une mesure de probabilité  $\rho_1$ , on divise tous les moments par  $d_0 = c_2 - (c_1)^2$ .

Introduisons alors la notation  $n \mapsto c_n^k$  pour représenter la suite des moments de la mesure  $\rho_k$ .

De l'étude précédente on tire immédiatement la formule de passage d'une séquence de moments à celle de la mesure secondaire normalisée suivante, soit :

$$\boxed{(c_2^k - (c_1^k)^2)c_n^{k+1} = c_{n+2}^k - c_1^k c_{n+1}^k - \sum_{j=0}^{j=n-1} (c_2^k - (c_1^k)^2)c_j^{k+1} c_{n-j}^k} \quad (\text{R})$$

A partir de cette relation nous allons en déduire par récurrence sur  $n$  que sous les hypothèses aux limites du théorème, la suite  $k \mapsto c_n^k$  converge vers une limite réelle  $l_n$  lorsque  $k$  tend vers l'infini.

- Pour  $n=0$ , cela est évident puisque tous les  $c_0^k$  sont égaux à 1. Ainsi  $l_0 = 1$
- Pour  $n=1$ , cela vient de l'hypothèse  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{2}$  puisque  $c_1^k = s_k$ . Ainsi  $l_1 = \frac{1}{2}$
- Pour  $n=2$ . Rappelons nous que le coefficient de normalisation  $d_0^k$  est défini par :

$d_0^k = c_2^k - (c_1^k)^2 = (t_k)^2$ . La deuxième hypothèse du théorème, soit  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \frac{1}{4}$  assistée du

résultat précédent nous permet de conclure  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_0^k = \frac{1}{16}$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_2^k = \frac{5}{16}$ . Ainsi  $l_2 = \frac{5}{16}$

Ces initialisations achevées, on peut entrer au cœur de la récurrence.

Supposons avoir prouvé que les suites  $k \mapsto c_q^k$  convergent vers un réel  $l_q$  pour tout entier  $q$  de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n+1\}$ . (Ceci vient d'être vérifié pour  $n=0$  et  $n=1$ ).

La relation (R) montre alors facilement que la suite  $k \mapsto c_{n+2}^k$  converge vers un réel  $l_{n+2}$  relié

aux limites précédentes par :

$$\boxed{\frac{l_n}{16} = l_{n+2} - l_1 l_{n+1} - \frac{1}{16} \sum_{j=0}^{j=n-1} l_j l_{n-j}} \quad (\text{R1})$$

Reste à relier ces limites successives aux moments de la mesure de Tchebychev mentionnée plus haut. On sait que c'est la seule mesure de densité invariante par le passage à sa mesure secondaire normalisée. Si on note  $n \mapsto m_n$  la suite des moments de cette mesure, on aura donc en fait pour tout  $k$  l'égalité  $m_n^k = m_n$ , en désignant par  $n \mapsto m_n^k$  la suite des moments de sa  $k^{\text{ième}}$  mesure secondaire normalisée. La relation (R) s'écrit alors dans ce cas particulier :

$$(m_2 - (m_1)^2)m_n = m_{n+2} - m_1 m_{n+1} - \sum_{j=0}^{j=n-1} (m_2 - (m_1)^2)m_j m_{n-j}$$

Or les premiers moments de  $\rho_t$  sont  $m_0 = 1, m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{5}{16}$ . Ceci nous simplifie la relation

en 
$$\boxed{\frac{m_n}{16} = m_{n+2} - m_1 m_{n+1} - \frac{1}{16} \sum_{j=0}^{j=n-1} m_j m_{n-j}} \quad (\text{R2})$$

La comparaison de (R1) et (R2) et les coïncidences  $l_0 = m_0, l_1 = m_1$  permettent de conclure que pour tout  $n$  entier  $l_n = m_n$ . La convergence faible de  $\rho_n$  vers  $\rho_{ich}$  est alors assurée.

Remarque : il est du domaine public que les moments de  $\rho_{ich}$  sont donnés par la formule :

$$m_n = 8 \int_0^1 \frac{t^n \sqrt{t(1-t)} dt}{\pi} = \frac{8}{\pi} B\left(n + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{C_{2n+2}^n}{4^n (n+1)} = \frac{(2n+2)!}{4^n (n!)^2 (n+1)^2 (n+2)}$$

## Programme d'étude de la convergence des densités successives.

```
> rob:=x->ln(x) ;

> normro:=proc(f)
local t,n,g;
n:=simplify(int(f(t),t=0..1));g:=simplify(f(t)/n);g:=unapply(g
,t);end;

> ro:=normro(rob) ;

> MOM:=proc(n)
local x,m;
m:=int((x^(n))*ro(x),x=0..1);m:=simplify(m);end;

> Sti:=proc()
local k,s,z,S;
s:=0;for k from 0 to 20 do
s:=s+MOM(k)/z^(k+1);od;S:=unapply(s,z);end;

> SA:=Sti();

> Coff1:=proc(S)
local t,c;
c:=limit(t^2*(S(t)-1/t),t=infinity);end;

> Coff2:=proc(S)
local t,c;
c:=limit(t^3*(S(t)-1/t-Coff1(S)/t^2),t=infinity);end;

> Trans:=proc(S)
local c1,c2,d,T;
c1:=Coff1(S);c2:=Coff2(S);d:=c2-(c1)^2;
T:=simplify((1/d)*(z-c1-1/S(z)));T:=unapply(T,z);end;
>

> Pol:=proc(S)
local k,v,c1,c2,d,SA;
SA:=S;v[0]:=1:v[1]:=z-Coff1(SA):for k from 1 to 10 do
c1:=Coff1(SA):c2:=Coff2(SA):d:=c2-
(c1)^2:SA:=Trans(SA);c1:=Coff1(SA);
;v[k+1]:=simplify((z-c1)*v[k]-d*v[k-
1]);od;v:=seq(v[k],k=0..10);end;
> v:=Pol(SA);

> Pols:=proc(S)
```

```

local k,u,c1,c2,d,SA;
SA:=S;u[0]:=0:u[1]:=1:for k from 1 to 10 do
c1:=Coff1(SA):c2:=Coff2(SA):d:=c2-
(c1)^2:SA:=Trans(SA);c1:=Coff1(SA);
;u[k+1]:=simplify((z-c1)*u[k]-d*u[k-
1]):od;u:=seq(u[k],k=0..10);end;
>
> u:=Pols(SA);

> for i from 0 to 10 do
n[i]:=int(v[i+1]*v[i+1]*ro(z),z=0..1);od;
> for i from 0 to 10 do d[i]:=n[i+1]/n[i];od;
> for i from 0 to 10 do
P[i]:=v[i+1]/sqrt(n[i]);f[i]:=unapply(P[i],z);od;

> for i from 0 to 10 do
Q[i]:=u[i+1]/sqrt(n[i]);g[i]:=unapply(Q[i],z);od;

> phi:=proc()
local x,t,T,phi;
T:=int((ro(t)-ro(x))/(t-
x),t=0..1);T:=simplify(T);phi:=ro(x)*ln(x/(1-x))-
T;phi:=unapply(phi,x);end;

> PHI:=phi();
>
> for i from 0 to 10 do G[i]:=((f[i](z)*PHI(z)-
g[i](z))^2+Pi*Pi*ro(z)*ro(z)*f[i](z)*f[i](z));H[i]:=unapply((r
o(z)/d[i])/G[i],z);od;

> tcheb:=x->8*sqrt(x*(1-x))/Pi;

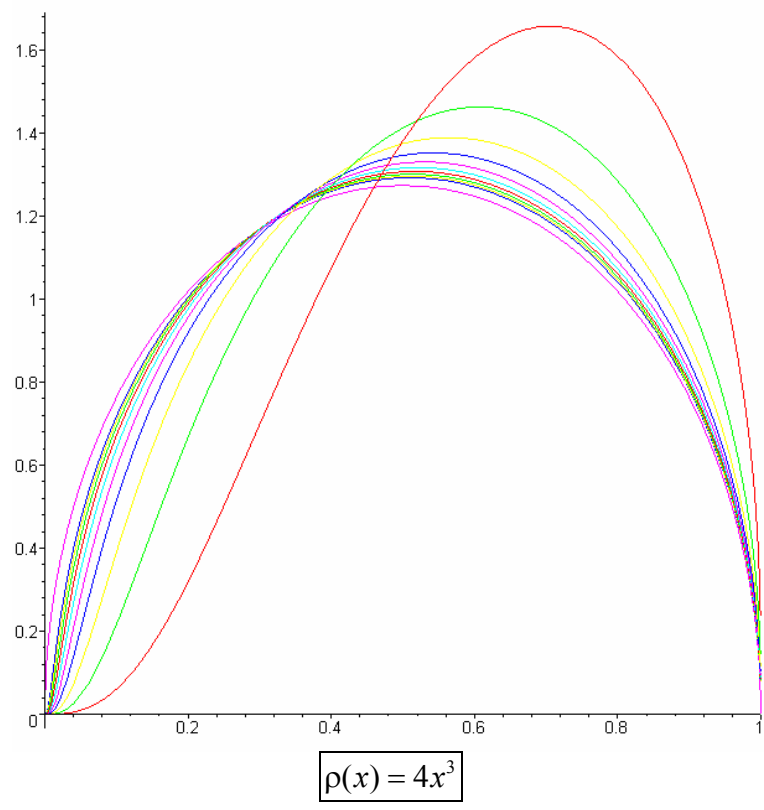
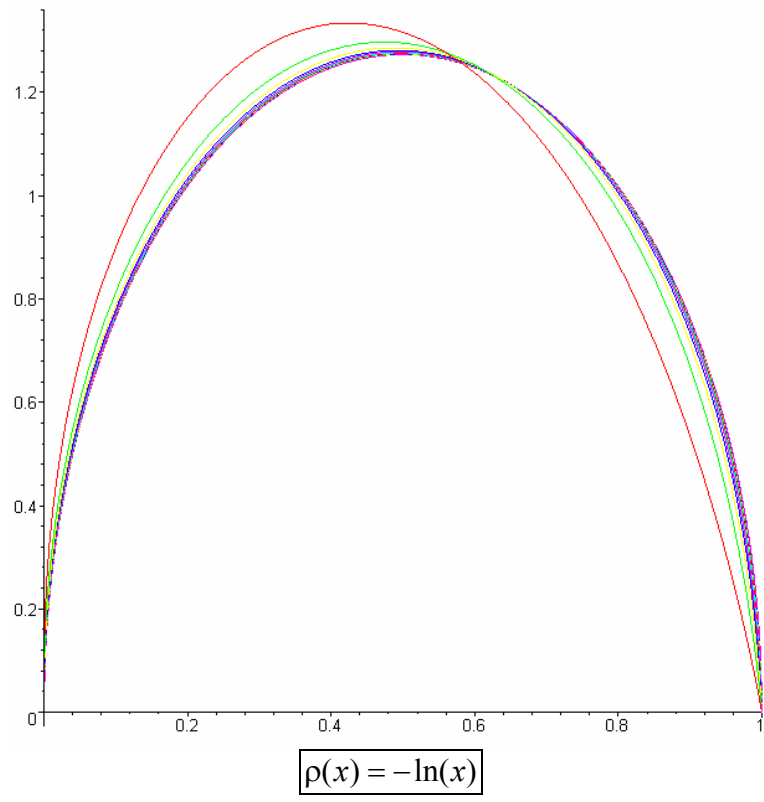
```

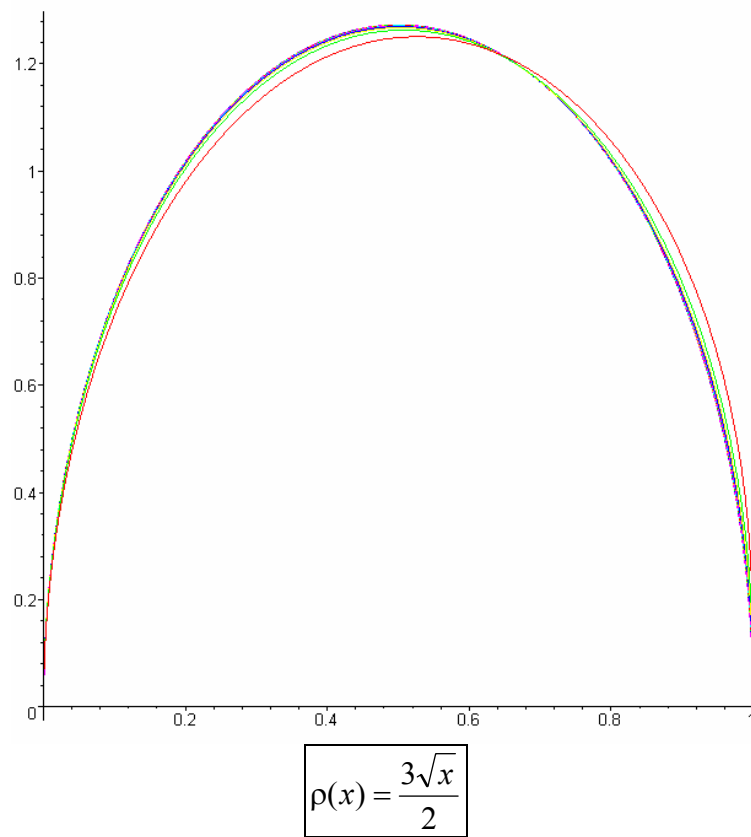
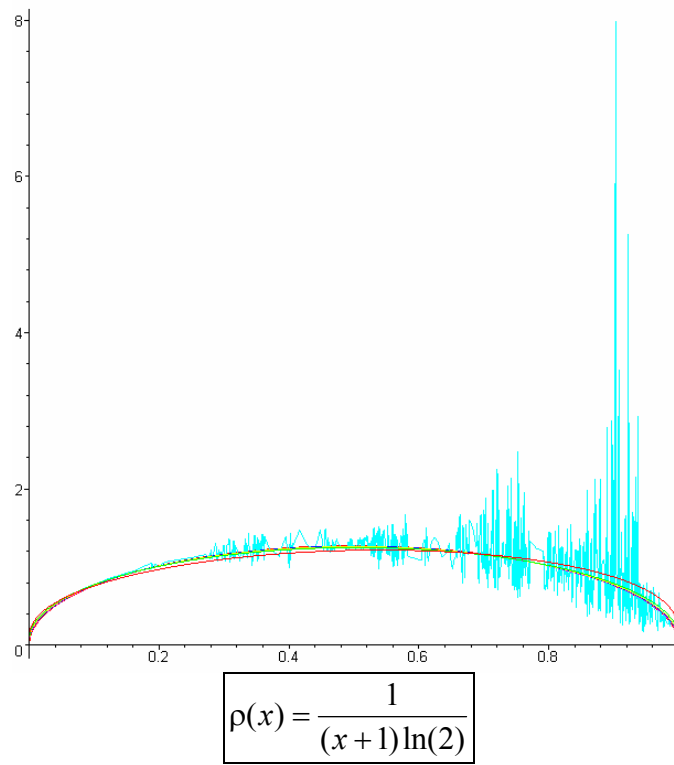
$$tcheb := x \rightarrow \frac{8\sqrt{x(1-x)}}{\pi}$$

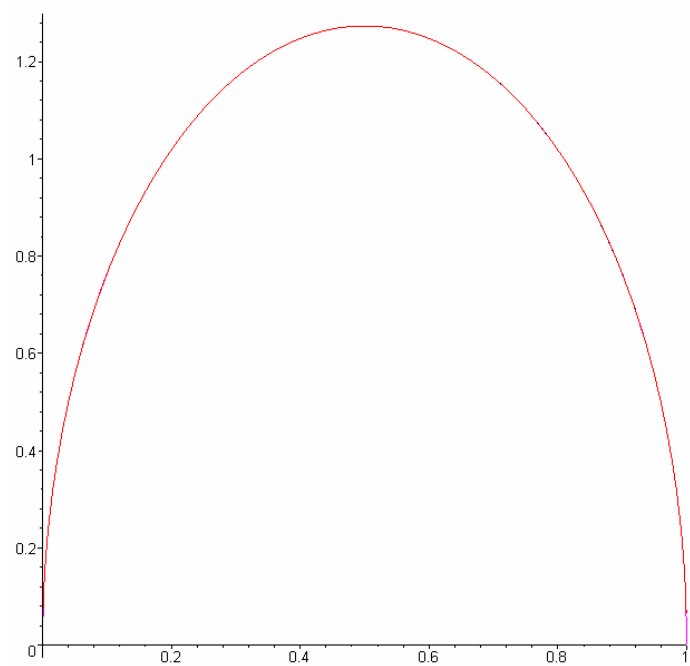
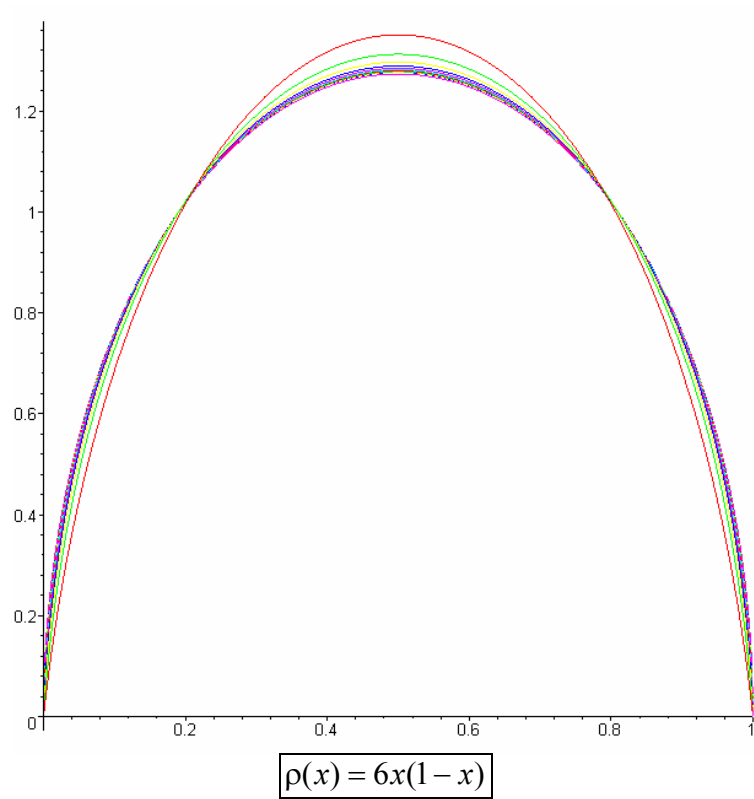
```

>
plot([H[0],H[1],H[2],H[3],H[4],H[5],H[6],H[7],H[8],tcheb],0..1
);

```



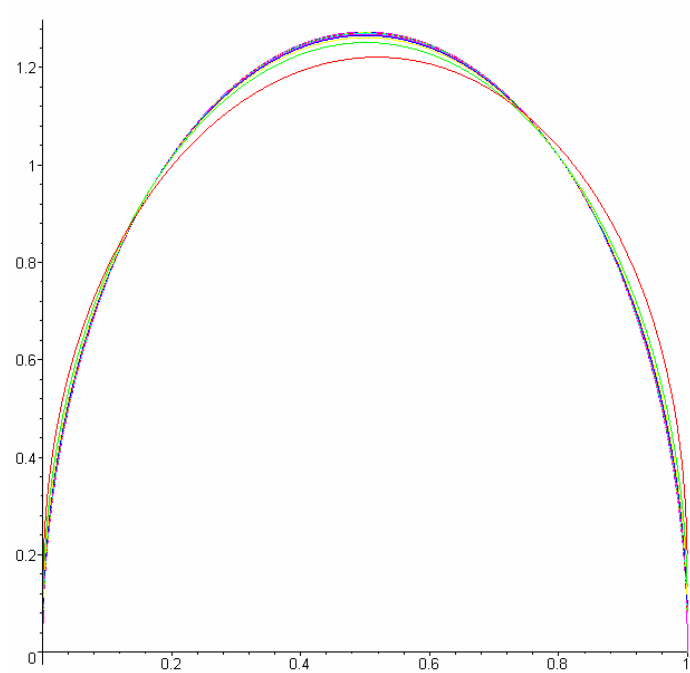




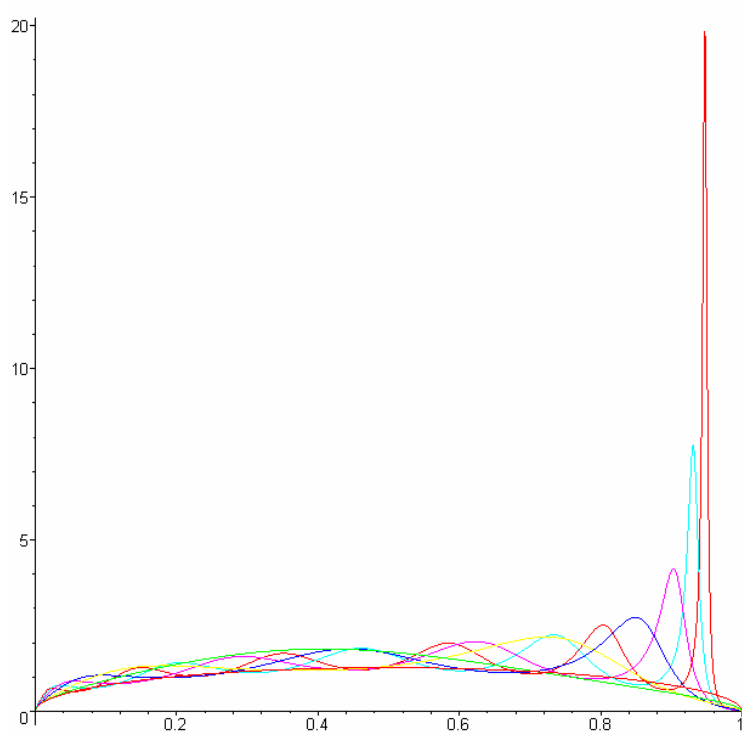
$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \quad (\rho_1 = \rho_t \text{ mesure invariante de Tchebychev})$$

> **evalf(tcheb(1/2))** ; 1.273239544 > **evalf(H[7](1/2))** ; 1.273239545

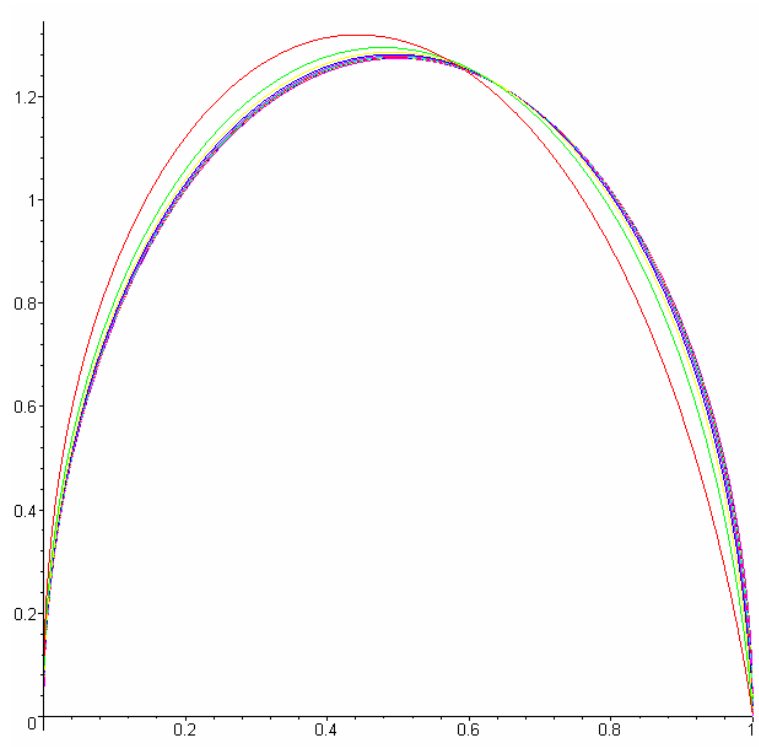




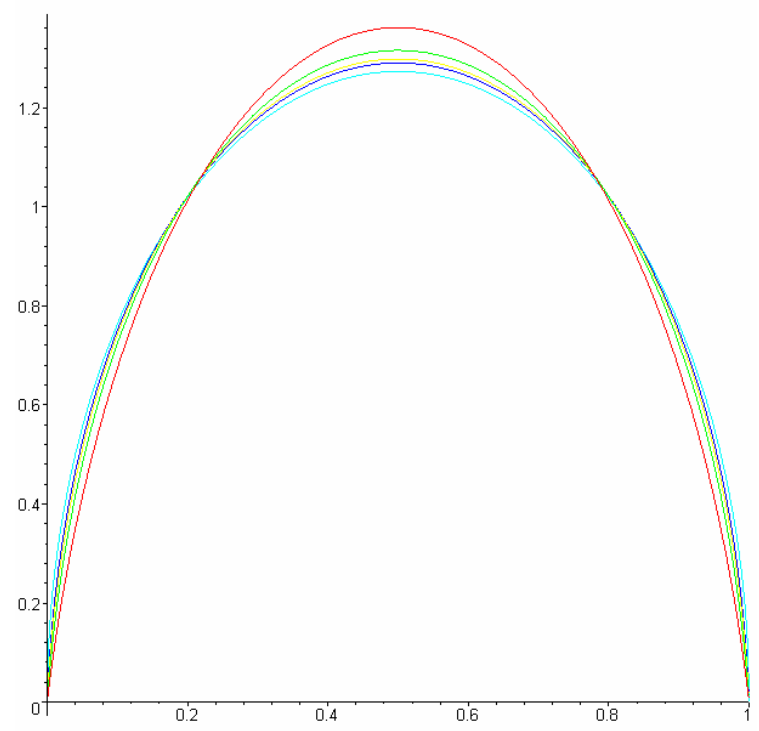
$$\rho(x) = \frac{1}{37}(4x^3 - 8\ln(x) + 28)$$



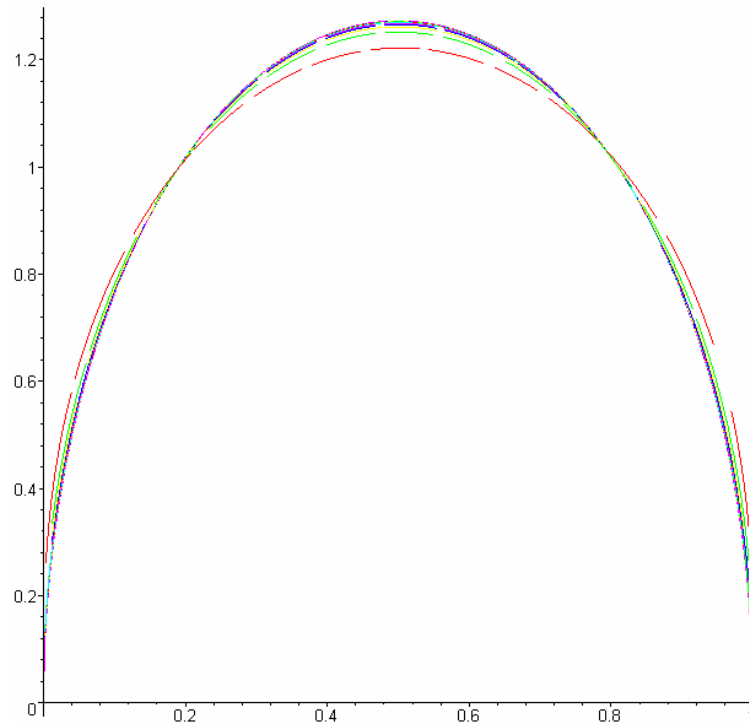
$$\rho(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \quad (\text{Mesure de Jacobi } \underline{\text{non r\u00e9ductible}})$$



$$\rho(x) = \frac{9\sqrt{x} \ln(x)}{4}$$



$$\rho(x) = \frac{\pi \sin(\pi x)}{2}$$



$$\rho(x) = x^{\frac{1}{7}}$$

### 3.8. Une expression de la transformée de Stieltjes de la $n^{\text{ieme}}$ mesure normalisée.

Partons de la formule établie précédemment pour une fonction  $f$  quelconque de  $L^2([0,1],\rho)$

On a vu que son coefficient de Fourier relatif à  $P_n$  peut s'écrire :

$$C_n(f) = \frac{1}{a_n} \langle F_{n-1}(f) / 1 \rangle_{\rho_n} \quad \text{avec} \quad F_{n-1} = T_{\rho_{n-1}} \circ T_{\rho_{n-2}} \circ \dots \circ T_{\rho_1} \circ T_{\rho}$$

Appliquons cette égalité à la fonction  $f$  définie par  $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x+a}$ , avec  $a \notin [-1,0]$

On se rappelle que  $f$  est valeur propre de tout opérateur  $T_{\rho}$ . Plus précisément on obtient par un

calcul élémentaire  $T_{\rho}(f(x)) = \gamma_a f(x)$  avec  $\gamma_a = -\int_0^1 \frac{\rho(t) dt}{t+a} = S_{\rho}(-a)$

On en déduit en cascade :  $F_{n-1}(f) = \gamma_0 \times \gamma_1 \times \dots \times \gamma_{n-1} \times f$ . Cela nous donne donc pour cette

fonction  $f$ :  $C_n(f) = \frac{1}{a_n} \times \gamma_0 \times \gamma_1 \times \dots \times \gamma_{n-1} \times \int_0^1 \frac{\rho_n(t)}{t+a} dt = -\frac{1}{a_n} \times \gamma_0 \times \gamma_1 \times \dots \times \gamma_{n-1} \times \gamma_n$

Autrement dit :

$$C_n(f) = -\frac{1}{a_n} \times \prod_{k=0}^{k=n} S_{\rho_k}(-a)$$

De manière plus explicite :  $\int_0^1 \frac{P_n(x)\rho(x)dx}{x+a} = -\frac{1}{a_n} \times \prod_{k=0}^{k=n} S_{\rho_k}(-a)$

En passant au quotient il vient alors naturellement :

$$\frac{C_{n+1}(f)}{C_n(f)} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \times S_{\rho_{n+1}}(-a) \text{ ou encore : } S_{\rho_n}(-a) = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{C_n(f)}{C_{n-1}(f)}. \text{ En résumé, :}$$

Pour tout  $z$  n'appartenant pas à  $[0,1]$  :

$$\int_0^1 \frac{\rho_n(t)}{z-t} dt = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{\int_0^1 \frac{P_n(t)\rho(t)dt}{t-z}}{\int_0^1 \frac{P_{n-1}(t)\rho(t)dt}{t-z}} \quad (F)$$

Quelques applications.

➤ Si on choisit pour mesure la densité de Tchebychev  $\rho_{tch}(x) = \frac{8\sqrt{x(1-x)}}{\pi}$

Sa transformée de Stieltjes vérifie pour  $a \notin [-1,0]$  :  $S_{\rho_t}(-a) = -8a - 4 + 8\sqrt{a^2 + a}$ .

Le coefficient de plus haut degré de  $P_n$  est  $a_n = 4^n$ .

On sait que cette densité coïncide avec toutes ses mesures secondaires normalisées successives.

On en déduit avec la formule (F) ci-dessus que le quotient de deux coefficients de Fourier successifs

est constant. Plus précisément on aura :  $-8a - 4 + 8\sqrt{a^2 + a} = 4 \times \frac{\int_0^1 \frac{P_n(t)\rho_t(t)dt}{t+a}}{\int_0^1 \frac{P_{n-1}(t)\rho_t(t)dt}{t+a}}$

$$\frac{\int_0^1 \frac{P_{n-1}(t)\rho_t(t)dt}{t+a}}{\int_0^1 \frac{P_n(t)\rho_t(t)dt}{t+a}} = -(2a+1+2\sqrt{a^2+a})$$

Le programme MAPLE suivant confirme la théorie.

```
> Coff1:=proc(S)
local t,c;
c:=limit(t^2*(S(t)-1/t),t=infinity);end;

> Coff2:=proc(S)
local t,c;
c:=limit(t^3*(S(t)-1/t-Coff1(S)/t^2),t=infinity);end;

> s0:=convert(series(8*z-4-8*sqrt(z*z-z),z=infinity,20),polynom,z);
>
> SA:=unapply(s0,z);
```

$$\begin{aligned}
SA := z \rightarrow & \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} + \frac{5}{16} \frac{1}{z^3} + \frac{7}{32} \frac{1}{z^4} + \frac{21}{128} \frac{1}{z^5} + \frac{33}{256} \frac{1}{z^6} + \frac{429}{4096} \frac{1}{z^7} + \frac{715}{8192} \frac{1}{z^8} + \frac{2431}{32768} \frac{1}{z^9} \\
& + \frac{4199}{65536} \frac{1}{z^{10}} + \frac{29393}{524288} \frac{1}{z^{11}} + \frac{52003}{1048576} \frac{1}{z^{12}} + \frac{185725}{4194304} \frac{1}{z^{13}} + \frac{334305}{8388608} \frac{1}{z^{14}} \\
& + \frac{9694845}{268435456} \frac{1}{z^{15}} + \frac{17678835}{536870912} \frac{1}{z^{16}} + \frac{64822395}{2147483648} \frac{1}{z^{17}} + \frac{119409675}{4294967296} \frac{1}{z^{18}} \\
& + \frac{883631595}{34359738368} \frac{1}{z^{19}}
\end{aligned}$$

```

> Trans:=proc(S)
local c1,c2,d,T;
c1:=Coff1(S);c2:=Coff2(S);d:=c2-(c1)^2;
T:=simplify((1/d)*(z-c1-1/S(z)));T:=unapply(T,z);end;
>

```

```

> Pol:=proc(S)
local k,v,c1,c2,d,SA;
SA:=S;v[0]:=1:v[1]:=z-Coff1(SA):for k from 1 to 10 do
c1:=Coff1(SA):c2:=Coff2(SA):d:=c2-
(c1)^2:SA:=Trans(SA);c1:=Coff1(SA);
;v[k+1]:=simplify((z-c1)*v[k]-d*v[k-
1]):od;v:=seq(v[k],k=0..10);end;
> v:=Pol(SA);
> for i from 0 to 10 do f[i]:=unapply(P[i],z);od;

```

$$f_0 := 1$$

$$f_1 := z \rightarrow 4z - 2$$

$$f_2 := z \rightarrow 16z^2 - 16z + 3$$

$$f_3 := z \rightarrow 64z^3 - 96z^2 + 40z - 4$$

$$f_4 := z \rightarrow 256z^4 - 512z^3 + 336z^2 - 80z + 5$$

$$f_5 := z \rightarrow 1024z^5 - 2560z^4 + 2304z^3 - 896z^2 + 140z - 6$$

$$f_6 := z \rightarrow 4096z^6 - 12288z^5 + 14080z^4 - 7680z^3 + 2016z^2 - 224z + 7$$

$$f_7 := z \rightarrow 16384z^7 - 57344z^6 + 79872z^5 - 56320z^4 + 21120z^3 - 4032z^2 + 336z - 8$$

$$\begin{aligned}
f_8 := z \rightarrow & 65536z^8 - 262144z^7 + 430080z^6 - 372736z^5 + 183040z^4 - 50688z^3 + 7392z^2 \\
& - 480z + 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_9 := z \rightarrow & 262144z^9 - 1179648z^8 + 2228224z^7 - 2293760z^6 + 1397760z^5 - 512512z^4 \\
& + 109824z^3 - 12672z^2 + 660z - 10
\end{aligned}$$

```

> verg:=x->-(2*x+1+2*sqrt(x^2+x));

```

```

> C:=proc (n,)
local x,c;
c:=int((1/(x+a))*f[n](x)*8*(sqrt(x-
x^2)/Pi),x=0..1);c:=simplify(c);end;
>
vcoff:=evalf(C(5,12.2357)/C(6,12.2357));vstielt:=evalf(verg(12
.2357));
vcoff:=-50.923162668060821197596854084
vstielt:=-50.9231625707926169157913010978
>
vcoff:=evalf(C(4,0.435648)/C(5,0.435648));vstielt:=evalf(verg(
0.435648));
>
vcoff:=-3.45298772711246106460394750120
vstielt:=-3.45298772711246106460394747609

```

**Remarque:** Les coefficients de Fourier formant une suite géométrique, il est facile d'en déduire une fonction génératrice des polynômes orthogonaux.

En effet on a  $C_n(f) = q^n C_0(f)$  avec  $q = 2\sqrt{a^2 + a} - 2a - 1$  et  $C_0(f) = \int_0^1 \frac{\rho_t(x) dx}{x+a} = -4q$

On en déduit  $\frac{1}{x+a} = -4 \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n+1} P_n(x)$ . Or  $q = 2\sqrt{a^2 + a} - 2a - 1 \Rightarrow a = -\frac{(q+1)^2}{4q}$

Ceci nous donne en simplifiant :

$$\boxed{\frac{t}{(t+1)^2 - 4tx} = \sum_{n=0}^{n=\infty} t^{n+1} P_n(x)}$$

```
>simplify(taylor(t/((t+1)^2-4*t*x),t=0,10));
```

```

t + (-2 + 4 x) t^2 + (3 - 16 x + 16 x^2) t^3 + (-4 + 40 x - 96 x^2 + 64 x^3) t^4 +
(5 - 80 x + 336 x^2 - 512 x^3 + 256 x^4) t^5 +
(-6 + 140 x - 896 x^2 + 2304 x^3 - 2560 x^4 + 1024 x^5) t^6 +
(7 - 224 x + 2016 x^2 - 7680 x^3 + 14080 x^4 - 12288 x^5 + 4096 x^6) t^7 +
(-8 + 336 x - 4032 x^2 + 21120 x^3 - 56320 x^4 + 79872 x^5 - 57344 x^6 + 16384 x^7) t^8 +
(9 - 480 x + 7392 x^2 - 50688 x^3 + 183040 x^4 - 372736 x^5 + 430080 x^6 - 262144 x^7
+ 65536 x^8) t^9 + O(t^10)

```

On retrouve bien les polynômes évalués par l'algorithme général.

### 3.9. Retour à la convergence des réduites de $S_\rho(z)$

Si on confronte les deux égalités :

$$(F) \int_0^1 \frac{\rho_n(t)}{z-t} dt = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{\int_0^1 \frac{P_n(t)\rho(t)dt}{t-z}}{\int_0^1 \frac{P_{n-1}(t)\rho(t)dt}{t-z}} \text{ obtenue dernièrement,}$$

$$\text{et } \int_0^1 \frac{\rho_n(t)dt}{x-t} = \frac{1}{\sqrt{d_0^{n-1}}} \times \frac{P_n(x)S_0(x) - Q_n(x)}{(P_{n-1}(x)S_0(x) - Q_{n-1}(x))} \text{ obtenue antérieurement par le schéma des}$$

fractions continues en posant  $S_n(z) = S_{\rho_n}(z) = \int_0^1 \frac{\rho_n(t)dt}{z-t}$ , on retrouve très rapidement la

formule classique permettant d'apprécier l'approche de  $S_\rho(z)$  par les réduites  $\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}$ , soit :

$$\boxed{S_\rho(z) - \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \frac{\int_0^1 \frac{P_n^2(t)\rho(t)dt}{z-t}}{P_n^2(z)}}, \text{ pour tout } z \text{ non élément de } [0,1].$$

Utilisation de la convergence de la suite des mesures secondaires.

Sous réserve de la convergence effective de la suite des densités secondaires normalisées, on

sait que la densité limite n'est autre que la mesure de Tchebychev  $\rho_{ich}(x) = \frac{8\sqrt{x(1-x)}}{\pi}$  étudiée

ci-dessus. En faisant tendre  $n$  vers l'infini dans la formule (F) :  $\int_0^1 \frac{\rho_n(t)}{z-t} dt = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{\int_0^1 \frac{P_n(t)\rho(t)dt}{t-z}}{\int_0^1 \frac{P_{n-1}(t)\rho(t)dt}{t-z}}$

On obtient alors vu l'étude précédente, et toujours pour  $a$  réel n'appartenant pas à  $[-1,0]$  :

$$\boxed{-8a - 4 + 8\sqrt{a^2 + a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \int_0^1 \frac{P_n(t)\rho(t)dt}{t+a}}{a_{n-1} \int_0^1 \frac{P_{n-1}(t)\rho(t)dt}{t+a}}}$$

### 3.10. Sur les racines des polynômes orthogonaux.

Supposons ici encore la convergence de la suite  $n \mapsto \rho_n$ .

On en déduit immédiatement que la suite  $n \mapsto d_0^n$  converge vers  $\frac{1}{16}$  et que la suite  $n \mapsto c_1^n$

converge vers  $\frac{1}{2}$ , ceci à partir de l'invariance de la transformée de Stieltjes limite.

On a alors au voisinage de  $n$  infini :  $(P_n(x)\frac{\varphi(x)}{2} - Q_n(x))^2 + \pi^2 \rho^2(x) P_n^2(x)$  équivalent au quotient  $\frac{16\rho(x)}{\rho_{tch}(x)}$ .

Rappelons maintenant la relation classique :  $(Q_n(x)P_{n-1}(x) - P_n(x)Q_{n-1}(x)) = \frac{\|v_{n-1}\|}{\|v_n\|} = \frac{1}{\sqrt{d_0^{n-1}}}$

On en déduit au voisinage de l'infini l'équivalence à 4 de ce déterminant.

Prenons donc  $n$  assez grand et notons  $\alpha$  une des racines du polynôme  $P_n$ .

On peut espérer que les deux équivalents signalés ci-dessus vont donner des estimations convenables des vraies grandeurs.

En les combinant simplement et vu  $P_n(\alpha) = 0$ , on obtient la relation  $P_{n-1}^2(\alpha) \cong \frac{\rho_{tch}(\alpha)}{\rho(\alpha)}$

Les simulations sur différentes mesures confirment bien cette estimation, même pour de

petites valeurs de l'entier  $n$ .  $P_{n-1}(\alpha) \cong \pm \frac{2\sqrt{2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}}{\sqrt{\pi\rho(\alpha)}}$

### 3.11. Polynômes orthogonaux des mesures secondaires successives.

On a vu dans une étude précédente que les polynômes orthonormaux  $A_n$  et secondaires  $B_n$  de

la mesure  $\mu$  associée à  $\rho$  sont définis par :  $\begin{cases} A_n(x) = Q_{n+1}(x) \\ B_n(x) = (x - c_1)Q_{n+1}(x) - P_{n+1}(x) \end{cases}$

Lorsqu'on normalise  $\mu$  en  $\rho_1 = \frac{\mu}{d_0}$ , il faut poser  $P_n^1(x) = \sqrt{d_0} A_n(x)$  pour garder le caractère unitaire des polynômes, l'orthogonalité pour  $\mu$  et  $\rho_1$  étant elles équivalentes.

De même il faudra changer  $B_n$  en  $Q_n^1(x) = \frac{B_n(x)}{\sqrt{d_0}}$  pour avoir la correspondance  $Q_n^1 = T_{\rho_1}(P_n^1)$

puisque  $T_{\rho_1} = \frac{1}{d_0} T_\mu$  et que  $T_\mu(A_n) = B_n$ . Les formules de passage des polynômes définis par  $\rho$

à ceux définis par  $\rho_1$  s'écrivent alors :  $\begin{cases} P_n^1(x) = \sqrt{d_0} Q_{n+1}(x) \\ Q_n^1(x) = \frac{1}{\sqrt{d_0}} [(x - c_1)Q_{n+1}(x) - P_{n+1}(x)] \end{cases}$

Plus généralement, si on note  $n \mapsto (P_n^k(x), Q_n^k(x))$  la famille de polynômes associée à la

mesure  $\rho_k$ , on pourra écrire sous forme matricielle:  $\begin{pmatrix} P_n^{k+1}(x) \\ Q_n^{k+1}(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{d_0^k}} \begin{pmatrix} 0 & d_0^k \\ -1 & x - c_1^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n+1}^k(x) \\ Q_{n+1}^k(x) \end{pmatrix}$



On peut donc évaluer facilement de proche en proche les polynômes orthogonaux associés aux mesures secondaires normalisées successives.

En particulier si on connaît la relation de récurrence à trois termes classique sur les polynômes orthonormaux d'origine, soit :  $xP_n(x) = t_n P_{n+1}(x) + s_n P_n(x) + t_{n-1} P_{n-1}(x)$ , on sait alors que

$c_1^n = s_n$  et  $\sqrt{d_0^n} = |t_n|$ . Quitte à changer  $P_n$  en  $(-1)^n P_n$  afin de garder un coefficient dominant de signe constant et donc changer  $t_n$  en  $-t_n$ , on pourra se ramener au cas  $t_n > 0$ . La relation

$$\text{matricielle s'écrira alors } \begin{pmatrix} P_n^{k+1}(x) \\ Q_n^{k+1}(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{t_k} \begin{pmatrix} 0 & t_k^2 \\ -1 & x - s_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n+1}^k(x) \\ Q_{n+1}^k(x) \end{pmatrix}$$

Notons également que les relations de récurrence à trois termes se décalent simplement d'un rang à chaque évaluation d'une nouvelle mesure. On obtient donc :

$$\forall n \geq 1 : \boxed{xP_n^k(x) = t_{n+k} P_{n+1}^k(x) + s_{n+k} P_n^k(x) + t_{n+k-1} P_{n-1}^k(x)}$$

Cette relations est en accord avec le théorème de convergence précédent car elle évolue alors vers celle élémentaire vérifiée par les polynômes orthonormaux relatifs à la mesure limite de

$$\text{Tchebychev, soit : } xT_n(x) = \frac{1}{4}T_{n+1}(x) + \frac{1}{2}T_n(x) + \frac{1}{4}T_{n-1}(x)$$

On rappelle au passage que  $T_n(x) = W_n(2x - 1)$  avec  $\frac{\sin(nx)}{\sin(x)} = W_{n-1}(\cos(x))$

### **Explicitation des polynômes orthogonaux des densités successives.**

On vient de voir que le passage d'un système orthonormal pour  $\rho_k$  à un système analogue pour la mesure normalisée suivante  $\rho_{k+1}$  se résume sous forme matricielle par :

$$\begin{pmatrix} P_n^{k+1}(x) \\ Q_n^{k+1}(x) \end{pmatrix} = M_k(x) \begin{pmatrix} P_{n+1}^k(x) \\ Q_{n+1}^k(x) \end{pmatrix} \text{ avec } M_k(x) = \frac{1}{t_k} \begin{pmatrix} 0 & t_k^2 \\ -1 & x - s_k \end{pmatrix}. \text{ On en déduit donc en cascade :}$$

$$\begin{pmatrix} P_n^{k+1}(x) \\ Q_n^{k+1}(x) \end{pmatrix} = \Pi_k(x) \begin{pmatrix} P_{n+1+k}^0(x) \\ Q_{n+1+k}^0(x) \end{pmatrix}, \text{ avec } \Pi_k(x) = M_k(x)M_{k-1}(x)\dots M_0(x)$$

Si on note  $\Pi_k(x) = \begin{pmatrix} A_{k+1}(x) & B_{k+1}(x) \\ C_{k+1}(x) & D_{k+1}(x) \end{pmatrix}$ , on voit donc apparaître naturellement les formules

permettant d'évaluer cette matrice produit de proche en proche, soit :

$$\begin{cases} A_{k+2}(x) = t_{k+1}C_{k+1}(x) & B_{k+2}(x) = t_{k+1}D_{k+1}(x) \\ C_{k+2}(x) = \frac{-1}{t_{k+1}}A_{k+1}(x) + \frac{(x-s_{k+1})}{t_{k+1}}C_{k+1}(x) & D_{k+2}(x) = \frac{-1}{t_{k+1}}B_{k+1}(x) + \frac{(x-s_{k+1})}{t_{k+1}}D_{k+1}(x) \end{cases}$$

De ces formules on déduit immédiatement que les polynômes  $C_k(x)$  et  $D_k(x)$  vérifient la relation de récurrence classique à trois termes des polynômes orthonormaux pour la mesure initiale, soit :  $\forall k \geq 1 \quad xC_k(x) = t_k C_{k+1}(x) + s_k C_k(x) + t_{k-1} C_{k-1}(x)$ . (Idem pour  $D$ ).

La théorie nous dit que l'on pourra donc exprimer les suites  $k \mapsto C_k(x)$  et  $k \mapsto D_k(x)$  comme combinaisons linéaires du système de base  $k \mapsto P_k^0(x)$ ;  $k \mapsto Q_k^0(x)$ , les composantes étant déduites des conditions initiales. Examinons donc les premiers termes.

$$\text{Rappelons d'abord les sources : } \begin{cases} P_0^0(x) = 1; & P_1^0(x) = \frac{x-s_0}{t_0} \\ Q_0^0(x) = 0; & Q_1^0(x) = \frac{1}{t_0} \end{cases} \quad \text{On en déduit par la récurrence :}$$

$$P_2^0(x) = \frac{(x-s_0)(x-s_1) - (t_0)^2}{t_0 t_1}; \quad Q_2^0(x) = \frac{x-s_1}{t_0 t_1}.$$

Or un calcul direct sur les matrices  $M_k(x)$  nous donne les expressions:

$$C_1(x) = -Q_1^0(x); \quad C_2(x) = -Q_2^0(x); \quad D_1(x) = P_1^0(x); \quad D_2(x) = P_2^0(x)$$

On en déduit immédiatement que  $C_k(x) = -Q_k^0(x)$  et  $D_k(x) = P_k^0(x)$  pour  $k \geq 1$

$$\text{Ainsi } \Pi_k(x) = \begin{pmatrix} -t_k Q_k^0(x) & t_k P_k^0(x) \\ -Q_{k+1}^0(x) & P_{k+1}^0(x) \end{pmatrix} \text{ et } \boxed{\begin{cases} P_n^{k+1}(x) = t_k [P_k^0(x) Q_{n+k+1}^0(x) - Q_k^0(x) P_{n+k+1}^0(x)] \\ Q_n^{k+1}(x) = P_{k+1}^0(x) Q_{n+k+1}^0(x) - P_{n+k+1}^0(x) Q_{k+1}^0(x) \end{cases}}$$

### 3.12. Sur la périodicité des mesures successives.

**Théorème.** Les seules mesures coïncidant avec un des termes de la suite de ses mesures secondaires normalisées sont les mesures de Tchebychev de deuxième forme.

Démonstration. Supposons qu'il existe un entier  $k$  supérieur ou égal à 1 tel que  $\rho = \rho_k$ .

On a vu que la transformée de Stieltjes  $S_k(z)$  de  $\rho_k$  s'obtient à partir de la transformée  $S(z)$

$$\text{de la mesure initiale } \rho \text{ par : } S_k(z) = \frac{1}{|t_{k-1}|} \frac{P_k(z)S(z) - Q_k(z)}{P_{k-1}(z)S(z) - Q_{k-1}(z)}.$$

$S_k(z)$  est donc solution de l'équation du deuxième degré suivante :

$$|t_{k-1}|P_{k-1}(z)X^2 - (|t_{k-1}|Q_{k-1}(z) - P_k(z))X + Q_k(z) = 0.$$

Des formules de Stieltjes Perron on déduit facilement que la réductrice de  $\rho$  est donc

$$\text{explicitée par la formule : } \varphi(x) = \frac{|t_{k-1}|Q_{k-1}(x) - P_k(x)}{|t_{k-1}|P_{k-1}(x)}. \quad (1)$$

$$\text{Or on connaît le lien : } \rho_k(x) = \frac{1}{(t_{k-1})^2} \frac{\rho(x)}{(P_{k-1}(x) \frac{\varphi(x)}{2} - Q_{k-1}(x))^2 + \pi^2 \rho^2(x) P_{k-1}^2(x)}.$$

La coïncidence de  $\rho$  et  $\rho_k$  donne  $(P_{k-1}(x) \frac{\varphi(x)}{2} - Q_{k-1}(x))^2 + \pi^2 \rho^2(x) P_{k-1}^2(x) = \frac{1}{|t_{k-1}|^2}$ . (2)

Des deux égalités (1) et (2) on tire :

$$\pi^2 |t_{k-1}|^2 P_{k-1}^2(x) \rho^2(x) = 1 - \frac{1}{4} (|t_{k-1}| Q_{k-1}(x) + P_k(x))^2.$$

Ainsi on obtient  $\rho(x) = \frac{\sqrt{M_k(x)}}{\pi |t_{k-1}| P_{k-1}(x)}$  avec  $M_k$  polynôme de degré  $2k$ .

Rappelons alors que toutes les racines  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$  du polynôme  $P_{k-1}$  sont réelles, simples et éléments de l'intervalle  $I$  sur lequel est définie la mesure  $\rho$ .

Pour que la mesure  $\rho$  soit bornée sur  $I$  il est donc nécessaire que toutes ces racines soient également racines du polynôme  $M_k$ . Après simplifications et en notant  $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$  les racines restantes de  $M_k$ , éventuellement complexes, la mesure  $\rho$  sera du type :

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{\lambda(x - \beta_1) \dots (x - \beta_{k+1})}{(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{k-1})}}.$$

Pour que  $\rho$  soit effectivement défini sur tout l'intervalle  $I$ , il s'ensuit que chacune des racines  $\alpha_i$  de  $P_{k-1}$  doit se retrouver au numérateur de la fraction sous la racine, sinon cette fraction changerait localement de signe au voisinage de  $\alpha_i$ .

Après simplification il restera donc une expression du type  $\rho(x) = \sqrt{\lambda(x - u)(x - v)}$  avec  $\lambda$  constante négative.

Par factorisation du trinôme et changement de variable affine on se ramène alors facilement à une mesure du type  $\rho(t) = K \sqrt{1 - t^2}$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .