

# Les mesures secondaires

## Chapitre 4

Roland GROUX, agrégé de l'Université  
Professeur en classe préparatoire  
Lycée Rouvière de Toulon

1<sup>er</sup> janvier 2006

# Étude de l'isométrie $T$ associée à la mesure de Lebesgue

Dans le cas particulier où  $\rho = 1$ , les moments d'ordre  $n$  de  $\rho$  sont égaux à  $c_n = \frac{1}{n+1}$ , et ceux de la mesure associée  $\mu$  sont donnés par  $d_n = -\omega_{n+2} = a_{n+2}$

avec  $\frac{x}{\ln(1-x)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$ .

Le nombre harmonique d'ordre  $n$  relatif à  $\rho$  est ici simplement le nombre

harmonique usuel  $H_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ .

Nous allons montrer que  $\rho$  est réductible et proposer des applications intéressantes des isométries  $\tilde{T}$  et  $\tilde{S}$  dans ce cas particulier.

## A. Etude de la réductrice

### 1. Réductibilité de la mesure de Lebesgue

Pour  $\rho(x) = 1$  nous savons que  $\mu(x) = \frac{1}{\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2}$ .

Vérifions que le quotient de  $\rho$  par  $\mu$  est bien élément de  $\mathcal{L}^2([0,1], \mu)$ .

$$\int_0^1 \left( \frac{\rho(x)}{\mu(x)} \right)^2 \mu(x) dx = \int_0^1 \ln^2 \left( \frac{x}{1-x} \right) dx + \pi^2 \text{ est bien convergente.}$$

Pour l'établir de manière élémentaire il suffit par exemple de commencer par montrer en intégrant par parties que :

$$I_1 = \int_0^1 \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_0^1 = -1, \text{ puis que } I_2 = \int_0^1 \ln^2(x) dx = -2I_1 = 2$$

De manière plus générale toutes les intégrales  $I_n = \int_0^1 \ln^n(x) dx$  convergent pour tout entier  $n$  et sont définies de proche en proche par  $I_{n+1} = -(n+1)I_n$ . On en déduit ensuite facilement par développement puis en changeant  $x$  en  $1-x$ , la convergence de  $\int_0^1 \ln^2 \left( \frac{x}{1-x} \right) dx$ .

## 2. Calcul de la réductrice

J'ai décelé cette fonction en étudiant systématiquement les transformées par  $T$  des fonctions usuelles avec le logiciel de calcul formel M.A.P.L.E. Etonné de trouver une fonction  $\varphi_0$  dont l'image était l'inverse de la mesure  $\mu$ , j'ai étudié ensuite les transformées des produits de  $\varphi_0$  par les puissances. C'est cette recherche qui m'a mis sur la voie de la deuxième isométrie  $S$  puis m'a conduit vers la généralisation développée dans le chapitre précédent.

L'emploi du logiciel n'étant pas une preuve décisive ( $\varphi$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  sur

$[0,1]$  mais sur  $]0,1[$  seulement), voici comment je vérifiais initialement l'égalité

$$T(\varphi) = \frac{\rho}{\mu}. \quad \textbf{Théorème}$$

La fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{L}^2([0,1])$  définie sur  $]0,1[$  par  $x \mapsto \varphi(x) = 2 \ln \left( \frac{x}{1-x} \right)$  est la réductrice de la mesure de Lebesgue.

Pour établir que  $\tilde{T}(\varphi) = \frac{\rho}{\mu}$  il suffit de vérifier que pour tout entier  $n$ :

$$\langle \tilde{T}(\varphi) \mid T(x^n) \rangle_{\mu} = \langle \frac{\rho}{\mu} \mid T(x^n) \rangle_{\mu}.$$

Cela revient à montrer que  $\langle \varphi \mid x^n \rangle_{\rho} = \langle T(x^n) \mid 1 \rangle_{\rho}$ .

Le deuxième produit scalaire s'évalue facilement puisque  $T(x^n) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{x^k}{n-k}$  et

$$\rho = 1;$$

$$\text{On obtient } \langle T(x^n) \mid 1 \rangle = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{(k+1)(n-k)} =$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{k=n-1} \left( \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k} \right) = 2 \frac{H_n}{n+1}.$$

Pour évaluer le premier produit écrivons

$$\langle \varphi | x^n \rangle = 2 \left( \int_0^1 x^n \ln(x) dx - \int_0^1 x^n \ln(1-x) dx \right).$$

En intégrant par parties il vient :

$$\int_0^1 x^n \ln(x) dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} dx = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

De même

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n \ln(1-x) dx &= \left[ \left( \frac{x^{n+1}-1}{n+1} \right) \ln(1-x) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}-1}{x-1} dx \\ &= -\frac{1}{n+1} \left( H_n + \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Ainsi on obtient bien également :  $\langle \varphi | x^n \rangle = 2 \frac{H_n}{n+1}$ , ce qu'il fallait démontrer.

Pour exemple d'application du théorème général d'explicitation de la réductrice, retrouvons cette fonction en analysant  $\psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2 \int_0^1 \frac{(x-t)\rho(t)dt}{(x-t)^2 + \epsilon^2}$ .

Puisque ici  $\rho(t) = 1$  on obtient directement

$$\psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [-\ln((x-t)^2 + \epsilon^2)]_0^1 = 2 \ln \left( \frac{x}{1-x} \right)$$

### 3. Traduction des propriétés de S

Commençons par expliciter la forme linéaire  $\Phi$ . On sait que pour tout élément  $f$  de  $\mathcal{L}^2([0,1],\rho)$ , on a l'égalité:  $\int_0^1 \tilde{T}(f(x))\rho(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)f(x)\rho(x)dx$ .

En particulier, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0,1]$ , sa transformée  $g = T(f)$  est

donnée par  $g(x) = \int_0^1 \frac{f(t) - f(x)}{t - x} dt$ , d'où

$$\int_0^1 \tilde{T}(f(x))\rho(x)dx = \iint_C \frac{f(t) - f(x)}{t - x} dt dx \text{ avec } C = [0,1] \times [0,1].$$

On obtient alors la formule:

$$\iint_C \frac{f(y) - f(x)}{y - x} dx dy = 2 \int_0^1 f(x) \ln \left( \frac{x}{1-x} \right) dx.$$

On peut en fait la vérifier directement en passant en coordonnées polaires, puis par changements de variables et intégrations par parties bien choisis.

Traduisons maintenant le caractère isométrique de  $S$ :

Pour tout  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0,1]$ , posons  $g = \tilde{T}(f)$  et  $h = S(f) = \varphi \times f - g$ .

Les trois conditions du théorème de composition entre  $T$  et  $S$  sont ici assurées.

En effet:

$\varphi \times f$  est élément de  $\mathcal{L}^2([0,1],\rho)$  car  $f$  est bornée sur  $[0,1]$  et

$$\int_0^1 \varphi^2(x)dx = 4 \int_0^1 \ln^2 \left( \frac{x}{1-x} \right) dx \text{ est convergente.}$$

⊃  $g = \tilde{T}(f)$  est élément de  $\mathcal{L}^2([0,1],\rho)$  car  $f$  étant supposée de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0,1]$ , le théorème de dérivation sous l'intégrale assure que  $g$  sera continue sur  $[0,1]$  donc de carré intégrable sur cet intervalle.

⊃ Enfin  $\frac{\rho}{\mu} \times f$  est élément de  $\mathcal{L}^2([0,1],\mu)$  car  $f$  est bornée sur cet intervalle

et  $\int_0^1 \frac{dx}{\mu(x)}$  a déjà été examinée comme convergente.

On aura donc bien la relation  $\|S(f)\|_\rho = \|f\|_{\frac{\rho^2}{\mu}}$ , qui se traduit ici par :

$$\int_0^1 \left( f(x) \times 2 \ln \left( \frac{x}{1-x} \right) - g(x) \right)^2 dx = \int_0^1 f^2(x) \left[ \ln^2 \left( \frac{x}{1-x} \right) + \pi^2 \right] dx.$$

En particulier pour  $f$  constante égale à 1 on en déduit  $\int_0^1 \ln^2 \left( \frac{x}{1-x} \right) dx = \frac{\pi^2}{3}$ .

On généralisera dans ce qui suit le calcul des intégrales  $\int_0^1 \ln^n \left( \frac{x}{1-x} \right) dx$  pour  $n$  entier quelconque, grâce à l'intervention répétée de  $\tilde{T}$ . Pour le moment démontrons une formule annexe déduite des isométries  $\tilde{T}$  et  $S$ , toujours dans le

cas de  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

$$\int_0^1 h^2(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 T^2(f^2(x)) dx + \frac{4\pi^2}{3} \int_0^1 f^2(x) dx.$$

En effet:  $\|h\|^2 = \langle f^2 \mid \frac{\varphi^2}{4} + \pi^2 \rangle = \langle f^2 \mid \pi^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle T(f^2) \mid T(\varphi^2) \rangle_\mu$   
 $+ \frac{1}{4} \int_0^1 f^2(x) dx \times \int_0^1 \varphi^2(x) dx.$

Soit en simplifiant:  $\|h\|^2 = \frac{1}{4} \langle T(f^2) \mid T(\varphi^2) \rangle_\mu + \frac{4\pi^2}{3} \|f\|^2.$

Calculons  $T(\varphi^2)$  à partir de  $T(\varphi \times f - T(f)) = \frac{\rho}{\mu} \times f$ . En prenant  $f = \varphi$  on obtient :

$$T(\varphi^2) - T\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{\varphi}{\mu}, \text{ soit } T(\varphi^2) - \frac{1}{4} T(\varphi^2) = \frac{\varphi}{\mu} \text{ et par suite } T(\varphi^2) = \frac{4\varphi}{3\mu}.$$

On peut donc transformer

$\langle T(f^2) \mid T(\varphi^2) \rangle_\mu$  en :

$$\frac{4}{3} \langle T(f^2)/\varphi \rangle = \frac{4}{3} \langle T^2(f^2) \mid T(\varphi) \rangle_\mu = \frac{4}{3} \langle T^2(f^2)/1 \rangle.$$

On obtient finalement:  $\|h\|^2 = \frac{1}{3} \langle T^2(f^2)/1 \rangle + \frac{4\pi^2}{3} \|f\|^2$ , ce qu'il fallait démontrer.



## B. Itérations déduites de la composée $T \circ S$

### 1. Une démarche algébrique

Pour des raisons de commodité nous poserons  $\varphi_0 = \frac{\varphi}{2}$ , et nous nous proposons d'étudier la transformation  $f \mapsto T(\varphi_0^n f)$ . Celle-ci n'est plus définie sur  $\mathcal{L}^2([0,1],\rho)$  mais sur une classe plus restreinte de fonctions contenant les polynômes et les puissances de  $\varphi_0$ .

Dans toute la suite nous supposerons que  $f$  est choisie telle que les transformations proposées sont effectivement toujours possibles, c'est à dire que les conditions d'application de la formule de composition se retrouvent à chaque étage du calcul.

Pour des commodités d'écriture on notera ici  $T$  en place de  $\tilde{T}$ .

Partons de l'identité fondamentale  $T(\varphi f) = T^2(f) + \left(\frac{\varphi^2}{4} + \pi^2\right) \times f$  qui se traduit

$$2T(\varphi_0 \times f) = T^2(f) + (\varphi_0^2 + \pi^2) \times f.$$

En posant  $\varphi_0 = \pi\varphi_1$  on obtient  $\frac{1}{\pi}T(\varphi_1 f) = \frac{T^2(f)}{2\pi^2} + (\varphi_1^2 + 1)\frac{f}{2}$ .

En introduisant  $T_1 = \frac{T}{\pi}$  il vient alors :  $2T_1(\varphi_1 f) = T_1^2(f) + (\varphi_1^2 + 1)f$ .

Nous allons maintenant pour des raisons de commodité travailler sur des morphismes agissant sur  $f$  sans donner de support précis, la seule contrainte

étant que toutes les opérations mentionnées soient possibles à partir de  $f$ .  
Si on veut une formulation plus académique, on pourra tout reprendre en réintroduisant la variable cachée  $f$ , mais l'essentiel des calculs apparaît plus clairement dans la démarche algébrique qui suit.

Si on note  $a = T_1$ ,  $b$  le morphisme  $f \mapsto \varphi_1 \times f$ , et  $1$  l'application identique, l'égalité précédente se simplifie en effet en :  $2ab = a^2 + b^2 + 1$ . (F)

## 2. Des polynômes intéressants

À partir de (F) on montre facilement par récurrence le résultat suivant :

Pour tout entier  $n$  il existe un couple  $(A_n, B_n)$  de fonctions polynômes de degrés au plus  $n + 1$  tel que :  $ab^n = A_n(a) + B_n(b)$ , avec le terme dominant de  $B_n$  égal à  $\frac{n}{n+1}b^{n+1}$ .

⊃ La formule est vraie pour  $n = 0$  avec  $A_0(X) = X$  et  $B_0(X) = 0$ .

La formule est vraie pour  $n = 1$  avec :  $A_1(X) = \frac{X^2}{2}$  et  $B_1(X) = \frac{X^2 + 1}{2}$ .

⊃ Supposons la vraie jusqu'à un ordre  $n$ . En multipliant à droite les deux termes de l'égalité (F) par  $b^n$  on obtient :  $2ab^{n+1} = a^2b^n + (b^2 + 1)b^n$ .

De l'hypothèse de récurrence, on déduit immédiatement :

$$a^2b^n = aA_n(a) + aB_n(b).$$

Par combinaison des deux égalités précédentes :

$$2ab^{n+1} = aA_n(a) + aB_n(b) + (b^2 + 1)b^n.$$

Or, toujours par hypothèse de récurrence:  $B_n(b) = \sum_{k=0}^{k=n} \lambda_n^k b^k + \frac{n}{n+1} b^{n+1}$ .

Ainsi:  $aB_n(b) = \sum_{k=0}^{k=n} \lambda_n^k (A_k(a) + B_k(b)) + \frac{n}{n+1} ab^{n+1}$  ( d'après  $ab^k = A_k(a) + B_k(b)$ ), et par suite:

$$2ab^{n+1} = aA_n(a) + \frac{n}{n+1} ab^{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n} \lambda_n^k (A_k(a) + B_k(b)) + (b^2 + 1)b^n.$$

En regroupant les termes en  $ab^{n+1}$  on obtient

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right) ab^{n+1} = aA_n(a) + \sum_{k=0}^{k=n} \lambda_n^k (A_k(a) + B_k(b)) + (b^2 + 1)b^n.$$

Considérons alors les polynômes définis par:

$$\begin{aligned} A_{n+1}(X) &= \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \left( XA_n(X) + \sum_{k=0}^{k=n} \lambda_n^k A_k(X) \right) \\ B_{n+1}(X) &= \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \left( (X^2 + 1)X^n + \sum_{k=0}^{k=n} \lambda_n^k B_k(X) \right) \end{aligned}$$

Il est clair que  $ab^{n+1} = A_{n+1}(a) + B_{n+1}(b)$  et que le terme dominant de  $B_{n+1}(X)$

est  $\left(\frac{n+1}{n+2}\right) X^{n+2}$ .

Nous avons donc établi l'hérédité de la formule en question et par suite sa validité pour tout entier  $n$ .

### 3. Retour à l'opérateur $T$


Rappelons que  $a = \frac{T}{\pi}$  et  $f \mapsto b(f) = \frac{\varphi_0}{\pi} \times f$ .

Si on note  $A_n(X) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_n^k X^k$  et  $B_n(X) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k X^k$ , l'égalité obtenue pour  $ab^n$  se traduit :

$$T(\varphi_0^n f) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k} T^k(f) + \left( \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \varphi_0^k \right) \times f. \quad (F_1)$$

### ⊃ Application au calcul de $T(\varphi_0^n)$

Les relations de récurrence montrent clairement que  $A_n(0) = 0$  pour tout entier  $n$ .

On en conclut  $\alpha_n^0 = 0$ . Ainsi si on prend  $f = 1$  dans la relation précédente, on 

aura  $T^k(f) = 0$  pour tout  $k \geq 1$  et il nous reste simplement :

$$T(\varphi_0^n) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \varphi_0^k. \quad (F_2)$$

### → Explicitation du terme constant de $B_n$

On va montrer que les coefficients  $\lambda_n^0$  sont nuls lorsque  $n$  est pair et pour un

exposant impair satisfont à la formule générale :  $\lambda_{2n-1}^0 = \frac{(4^n - 1)(-1)^{n-1} \beta_{2n}}{n}$

avec  $\beta_{2n}$  nombre de Bernoulli d'ordre  $2n$ .

Pour  $x = \frac{1}{2}$ , la formule (F<sub>2</sub>) donne en effet, vu que  $\varphi_0\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  :

$$\int_0^1 \frac{\varphi_0^n(t)}{t - \frac{1}{2}} dt = \lambda_n^0 \pi^{n+1}.$$

Or en posant  $x = \frac{t}{1-t}$  :

$$\int_0^1 \frac{\varphi_0^n(t)}{t - \frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(x) dx}{x^2 - 1} = 2 \int_0^1 (1 + (-1)^{n+1}) \frac{\ln^n(x) dx}{x^2 - 1}.$$

Lorsque  $n$  est impair, on retrouve une intégrale classique qui nous donne la

formule en question.

$$\text{En effet : } 4 \int_0^1 \frac{\ln^{2n-1}(x) dx}{x^2 - 1} = \frac{(4^n - 1)(-1)^{n-1} \beta_{2n}}{n} \pi^{2n}.$$

→ **Application au calcul des intégrales de  $\varphi_0^n$  sur  $[0,1]$**

On prend ici  $f(x) = x$ . On a  $T(x) = 1$  et pour  $k \geq 2$ ,  $T^k(x) = 0$ .

Il reste donc d'après la formule ( $F_1$ ):

$$T(\varphi_0^n \times x) = \alpha_n^1 \pi^n + \left( \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \varphi_0^k \right) \times x.$$

Or on se rappelle que  $T(x \times f(x)) = x \times T(f(x)) + \int_0^1 f(x) dx$ .

Ainsi on peut calculer:  $T(x \times \varphi_0^n) = x \times T(\varphi_0^n) + \int_0^1 \varphi_0^n(x) dx =$

$$x \times \left( \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \varphi_0^k \right) + \int_0^1 \varphi_0^n(x) dx.$$

En comparant les deux modes de calcul, il vient simplement :

$$\int_0^1 \varphi_0^n(x) dx = \alpha_n^1 \pi^n.$$

On sait en fait évaluer cette intégrale par la méthode des résidus. Elle fait

apparaître les nombres dits **cosécants**.

Plus précisément on aura pour un indice pair :

$$\alpha_{2n}^1 = (-1)^{n+1} 2(2^{2n-1} - 1) \beta_{2n}$$

avec  $\beta_{2n}$  nombre de Bernoulli d'ordre  $2n$ .

On a donc dans cette nouvelle méthode une apparition originale de ces nombres de Bernoulli, couplée avec le calcul effectif des intégrales en question.

→ **Généralisation au calcul des intégrales de  $\varphi_0^n(x)f(x)$**

Rappelons que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[0,1]$  :

$$T(xf(x)) = xT(f(x)) + \int_0^1 f(x) dx ; \dots ;$$

$$T^n(xf(x)) = xT^n(f(x)) + \int_0^1 T^{n-1}(f(x)) dx.$$

On peut alors calculer  $T(\varphi_0^n(x)xf(x))$  de deux manières :

• Par la formule (1) :  $T(\varphi_0^n(x)xf(x)) =$

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k} T^k(xf(x)) + \left( \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \varphi_0^k(x) \right) \times xf(x).$$

• Par la formule (2) :  $T(x\varphi_0^n(x)f(x)) = xT(\varphi_0^n(x)f(x)) + \int_0^1 \varphi_0^n(x)f(x) dx.$

$$\text{Or } T(\varphi_0^n(x)f(x)) = \sum_{k=1}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k} T^k(f(x)) + \left( \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \varphi_0^k(x) \right) \times f(x)$$

et pour tout  $k$  élément de  $\{1, \dots, n-1\}$  :

$$T^k(xf(x)) = xT^k(f(x)) + \int_0^1 T^{k-1}(f(x))dx. \text{ On obtient donc :}$$

$$(1) : T(\varphi_0^n(x)xf(x)) =$$

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k} [xT^k(f(x)) + \int_0^1 T^{k-1}(f(x))dx] + \left( \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \varphi_0^k(x) \right) xf(x)$$

$$(2) : T(\varphi_0^n(x)xf(x)) =$$

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k} xT^k(f(x)) + \left( \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \varphi_0^k(x) \right) xf(x) + \int_0^1 \varphi_0^n(x)f(x)dx.$$

Par comparaison des deux modes de calcul on obtient donc la formule généralisant celle du paragraphe précédent :

$$\int_0^1 \varphi_0^n(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k} \int_0^1 T^{k-1}(f(x))dx. \quad (F_3)$$

→ **Cas particulier de la fonction  $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x+a}$**

Cette fonction est vecteur propre de  $T$ , avec la valeur propre  $\gamma_a = \ln\left(\frac{a}{1+a}\right)$ .



On aura donc pour tout  $k \geq 1$  :  $T^k(f(x)) = (\gamma_a)^k f(x)$ .

On en déduit aussitôt :  $\int_0^1 T^{k-1}(f(x)) dx = (\gamma_a)^{k-1} \int_0^1 \frac{dx}{x+a} = -(\gamma_a)^k$ .

La formule (F<sub>3</sub>) établie ci dessus donne alors dans ce cas particulier :

$$\int_0^1 \frac{\varphi_0^n(x)}{x+a} dx = - \sum_{k=1}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k} (\gamma_a)^k = -\pi^{n+1} A_n \left( \frac{\gamma_a}{\pi} \right). \quad (\text{F}_4)$$

Si on effectue le changement de variable  $t = \frac{x}{1-x}$ , l'égalité ci dessus se traduit :

$$\frac{1}{1+a} \int_0^\infty \frac{\ln^n(t) dt}{(1+t)(t + \frac{a}{1+a})} = -\pi^{n+1} A_n \left( \frac{\gamma_a}{\pi} \right). \text{ Si on pose}$$

$z = \gamma_a = \ln\left(\frac{a}{1+a}\right)$ , on obtient l'égalité :

$$(1 - e^z) \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t) dt}{(t+1)(t+e^z)} = -\pi^{n+1} A_n \left( \frac{z}{\pi} \right). \quad (\text{F}_5)$$

#### 4. Étude des puissances de la transformation T

Nous reprenons la formule  $2ab = a^2 + b^2 + 1$ . (F)

Par une récurrence analogue à celle développée pour le calcul de  $ab^n$ , on peut démontrer que  $a^n b$  est du type :

$a^n b = L_n(a) + M_n(b)$  avec  $L_n$  et  $M_n$  polynômes de sources :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0(a) = 0 \quad M_0(b) = b \\ L_1(a) = \frac{a^2 + 1}{2} \quad M_1(b) = \frac{b^2}{2} \end{array} \right\}.$$

Et les relations de récurrence suivantes : Si on pose  $L_n(a) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \omega_n^k a^k$  et

$$M_n(b) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \beta_n^k b^k.$$

$$L_{n+1}(X) = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) [(X^2 + 1)X^n + \sum_{k=0}^{k=n} \omega_n^k L_k(X)];$$

$$M_{n+1}(X) = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) [XM_n(X) + \sum_{k=0}^{k=n} \omega_n^k M_k(X)].$$

En comparant avec les modes de génération des polynômes  $A_n$  et  $B_n$  on voit très clairement que pour tout entier  $n$  :  $L_n(X) = B_n(X)$  et  $M_n(X) = A_n(X)$ .

En revenant aux définitions explicites des opérateurs  $a$  et  $b$ , il vient alors :

$$\frac{T^n}{\pi^n} \left( \frac{\varphi_0}{\pi} \times f \right) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \frac{T^k(f)}{\pi^k} + \left( \sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_n^k \frac{\varphi_0^k}{\pi^k} \right) \times f, \text{ soit après simplifications :}$$

$$T^n(\varphi_0 \times f) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} T^k(f) + \left( \sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k} \varphi_0^k \right) \times f. \quad (\text{F}_6)$$

En particulier, pour  $f = 1$ , il reste simplement :

$$T^{(n)}(\varphi_0) = \lambda_n^0 \pi^{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k} \varphi_0^k. \quad (\text{F}_7)$$

En calculant alors comme on l'a fait précédemment  $T^n(\varphi_0 \times f \times x)$  de deux manières, on obtient une formule similaire pour les intégrales sur  $[0,1]$  des  $T^k(\varphi_0 \times f)$ , soit :

$$\int_0^1 T^{n-1}(\varphi_0(x)f(x))dx = \sum_{k=1}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \int_0^1 T^{k-1}(f(x))dx. \quad (\text{F}_8)$$

Ici encore, pour  $f = 1$ , il reste :

$$\int_0^1 T^{n-1}(\varphi_0(x)) dx = \lambda_n^1 \pi^n. \quad (F_9)$$

En combinant (F<sub>7</sub>) et (F<sub>9</sub>) il vient :

$$\lambda_{n+1}^1 \pi^{n+1} = \int_0^1 T^n(\varphi_0(x)) dx = \lambda_n^0 \pi^{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_n^k \pi^{n+1-k} \int_0^1 \varphi_0^k(x) dx.$$

En se rappelant que  $\int_0^1 \varphi_0^k(x) dx = \alpha_k^1 \pi^k$  on obtient alors l'égalité :

$$\lambda_{n+1}^1 - \lambda_n^0 = \sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_n^k \alpha_k^1.$$

Voici les premiers polynômes des familles étudiées :

$$A_0(X) = X; \quad A_1(X) = \frac{X^2}{2}; \quad A_2(X) = \frac{X^3 + X}{3}; \quad A_3(X) = \frac{X^4 + 2X^2}{4};$$

$$A_4(X) = \frac{3X^5 + 10X^3 + 7X}{15}.$$

$$A_5(X) = \frac{X^6 + 5X^4 + 7X^2}{6}; \quad A_6(X) = \frac{3X^7 + 21X^5 + 49X^3 + 31X}{21}$$

$$A_7(X) = \frac{X^8}{8} + \frac{7}{6}X^6 + \frac{49}{12}X^4 + \frac{31}{6}X^2; \quad A_8(X) =$$

$$\frac{X^9}{9} + \frac{4}{3}X^7 + \frac{98}{15}X^5 + \frac{124}{9}X^3 + \frac{127}{15}X.$$

$$B_0(X) = 0; \quad B_1(X) = \frac{X^2 + 1}{2}; \quad B_2(X) = \frac{2X^3 + 2X}{3}; \quad B_3(X) =$$

$$\frac{3X^4 + 4X^2 + 1}{4}.$$

$$B_4(X) = \frac{4}{5}X^5 + \frac{4}{3}X^3 + \frac{8}{15}X; \quad B_5(X) = \frac{5}{6}X^6 + \frac{5}{3}X^4 + \frac{4}{3}X^2 + \frac{1}{2}.$$

$$B_6(X) = \frac{6}{7}X^7 + 2X^5 + \frac{8}{3}X^3 + \frac{32}{21}X; \quad B_7(X) = \frac{7}{8}X^8 + \frac{7}{3}X^6 + \frac{14}{3}X^4 + \frac{16}{3}X^2 + \frac{17}{8}.$$

On en déduit en particulier en utilisant l'identité

$$\int_0^1 \varphi_0^n(x) dx = \alpha_n^1 \pi^n \quad \text{obtenue}$$

dans le paragraphe 3, les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \ln^4 \left( \frac{x}{1-x} \right) dx = \frac{7}{15} \pi^4; \quad \int_0^1 \ln^6 \left( \frac{x}{1-x} \right) dx = \frac{31}{21} \pi^6;$$

$$\int_0^1 \ln^8 \left( \frac{x}{1-x} \right) dx = \frac{127}{15} \pi^8; \quad \text{etc. ...}$$

## 5. Une autre génération des polynômes $A_n$

Nous partons de la formule (F<sub>5</sub>) :  $\pi^{n+1} A_n \left( \frac{z}{\pi} \right) = (e^z - 1) \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t) dt}{(t+1)(t+e^z)}$ .

Posons  $J_n(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t) dt}{(t+1)(t+e^z)}$ .

La méthode des résidus permet d'évaluer facilement de proche en proche ces intégrales classiques. On établit en effet grâce à un contour bien choisi le résultat suivant :

Si  $f_n$  est une fonction du type  $t \mapsto f_n(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} \ln^n(t)$  avec  $P$  et  $Q$  polynômes

tels que

$\text{degre}(Q) \geq \text{degre}(P) + 2$  et si  $Q$  n'admet pas de racines réelles positives, alors si

on pose  $J_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$  et si on désigne par  $z_1, z_2, \dots, z_q$  les racines de  $Q$ ,

on obtient l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} C_n^k (2i\pi)^{n-k} J_k = -2i\pi \sum_{k=1}^{k=q} \text{Res}(f_n, z_k).$$

Pour ce qui nous concerne,  $Q$  admet deux racines  $-1$  et  $-e^z$ , et les résidus en ces points sont :

$$\text{Res}(f_n, -1) = \frac{\text{Log}^n(-1)}{e^z - 1} = \frac{(i\pi)^n}{e^z - 1} \quad \text{et} \quad \text{Res}(f_n, -e^z) = \frac{\text{Log}^n(-e^z)}{1 - e^z} = \frac{(z + i\pi)^n}{1 - e^z}.$$

(En effet le contour choisi appelle une détermination principale du logarithme choisie dans l'intervalle  $]0, 2\pi[$ )

Pour les détails voir par exemple l'ouvrage de J.Lelong-Ferrand et J.M.Arnaudière : Cours de mathématiques Tome 4 Equations différentielles et intégrales multiples. Dunod Université. Pages 395-397.

On obtient donc ici après simplifications :

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} C_n^k (2i)^{n-(k+1)} A_k \left( \frac{z}{\pi} \right) = \left( \frac{z}{\pi} + i \right)^n - (i)^n.$$

En posant  $X = \frac{z}{\pi}$  et par décalages d'indices, on peut alors écrire :

$$\sum_{k=0}^{k=n+1} C_{n+2}^k (2i)^{n+1-k} A_k(X) = (X + i)^{n+2} - (i)^{n+2}.$$

Ceci nous permet donc d'évaluer nos polynômes  $A_n$  à partir de  $A_0(X) = X$  grâce à la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1}(X) = \frac{1}{n+2} [(X + i)^{n+2} - (i)^{n+2} - \sum_{k=0}^{k=n} C_{n+2}^k (2i)^{n+1-k} A_k(X)].$$

Les calculs effectués redonnent bien les polynômes déjà évalués précédemment.

>  $A[0] := X;$

$$A_0 := X$$

```

> Sumo:=proc(n)
> local k,S;
> S:=0; for k from 0 to n do
> S:=simplify(S+binomial(n+2,k)*((2*I)^(n+1-k))*A[k]);od;S;end;
> for n from 0 to 11 do A[n+1]:=sort(simplify((1/(n+2))*((X+I)^(n+2)
>
-(I)^(n+2)-Sumo(n)))));end;

```

$$1/2 X^2 + iX - iA_0$$

$$1/3 X^3 + X - 2/3 A_0$$

$$1/4 X^4 + 1/2 X^2$$

$$1/5 X^5 + 2/3 X^3 + X - \frac{8}{15} A_0$$

$$1/6 X^6 + 5/6 X^4 + 7/6 X^2$$

$$1/7 X^7 + X^5 + 7/3 X^3 + 3X - \frac{32}{21} A_0$$

$$1/8 X^8 + 7/6 X^6 + \frac{49}{12} X^4 + \frac{31}{6} X^2$$

$$1/9 X^9 + 4/3 X^7 + \frac{98}{15} X^5 + \frac{124}{9} X^3 + 17X - \frac{128}{15} A_0$$

$$1/10 X^{10} + 3/2 X^8 + \frac{49}{5} X^6 + 31X^4 + \frac{381}{10} X^2$$

$$1/11 X^{11} + 5/3 X^9 + 14X^7 + 62X^5 + 127X^3 + 155X - \frac{2560}{33} A_0$$

$$1/12 X^{12} + \frac{11}{6} X^{10} + \frac{77}{4} X^8 + \frac{341}{3} X^6 + \frac{1397}{4} X^4 + \frac{2555}{6} X^2$$



$$1/13 X^{13} + 2 X^{11} + \frac{77}{3} X^9 + \frac{1364}{7} X^7 + \frac{4191}{5} X^5 + \frac{5110}{3} X^3 + 2073 X - \frac{1415168}{1365} A_0$$

## 6. Rapports entre les deux familles de polynômes

Nous partons ici de la formule (F<sub>2</sub>):  $T(\varphi_0^n) = \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \varphi_0^k$ .

Cela se traduit :

$$\int_0^1 \frac{\ln^n \left( \frac{u}{1-u} \right) - \ln^n \left( \frac{x}{1-x} \right)}{u-x} du = \sum_{k=0}^{k=n+1} \lambda_n^k \pi^{n+1-k} \ln^k \left( \frac{x}{1-x} \right) \text{ sur } ]0,1[.$$

Par changement de variables  $z = \ln \left( \frac{x}{1-x} \right)$  et  $t = \frac{u}{1-u}$ , il vient après simplifications :

$$(e^z + 1) \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t) - z^n}{(1+t)(t-e^z)} dt = \pi^{n+1} B_n \left( \frac{z}{\pi} \right) \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ donc sur } \mathbb{C} \text{ par prolongement analytique.}$$

En posant  $z = z + i\pi$  on obtient :

$$(1 - e^z) \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t) - (z + i\pi)^n}{(1+t)(t+e^z)} dt = \pi^{n+1} B_n \left( \frac{z}{\pi} + i \right).$$

$$\text{Or par un calcul évident : } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)(t+e^z)} = \frac{z}{e^z - 1}.$$

On en déduit l'égalité suivante :

$$(1 - e^z) \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t) dt}{(1+t)(t+e^z)} = \pi^{n+1} \left[ B_n \left( \frac{z}{\pi} + i \right) - \frac{z}{\pi} \left( \frac{z}{\pi} + i \right)^n \right].$$

Or on a établi précédemment lors de l'étude des polynômes  $A_n$  une formule similaire, soit :

$$(1 - e^z) \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t) dt}{(1+t)(t+e^z)} = -\pi^{n+1} A_n \left( \frac{z}{\pi} \right) \quad (F_5).$$

La comparaison des deux formules ci dessus donne un lien élémentaire entre les deux polynômes.

On voit que pour tout entier  $n$  :  $B_n \left( \frac{z}{\pi} + i \right) = \frac{z}{\pi} \left( \frac{z}{\pi} + i \right)^n - A_n \left( \frac{z}{\pi} \right)$ , ou encore, en posant  $X = \frac{z}{\pi} + i$  :

$$B_n(X) = (X - i)X^n - A_n(X - i).$$

Cette relation peut se déduire en fait directement de la formule algébrique (F) dans le cas où  $a$  et  $b$  sont des complexes avec  $a = X - i$  ;  $b = X$ . Mais ce qui suit justifie l'approche intégrale.

De l'égalité  $(e^z + 1) \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t) - z^n}{(1+t)(t-e^z)} dt = \pi^{n+1} B_n \left( \frac{z}{\pi} \right)$  on peut en dérivant par rapport à  $z$  en 0, trouver l'expression du coefficient de degré 1 dans  $B_n$ , soit :  $\lambda_n^1$ .

$$\pi^n B'(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t)}{(1+t)(t-1)} dt + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t)}{(1+t)(t-1)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n(t)}{(t-1)^2} dt.$$

Cette intégrale classique est nulle pour  $n$  impair et conduit pour les indices pairs à l'expression en fonction des nombres de Bernoulli :  $\lambda_{2n}^1 = -(-4)^n \beta_{2n}$ .

```
> A[1] := X*X/2; B[1] := (X*X+1)/2; A[0] := X; B[0] := 0;
```

$$A_1 := 1/2 X^2$$

$$B_1 := 1/2 X^2 + 1/2$$

$$A_0 := X$$

$$B_0 := 0$$

```
> for n from 1 to 13 do B[n+1] := simplify(((n+1)/(n+2))*((X^n)*(X*X+1)
>
+sum(coeff(B[n], X, k)*B[k], k=0..n))); od;
```

$$B_2 := 2/3 X (X^2 + 1)$$

$$B_3 := 3/4 X^4 + X^2 + 1/4$$

$$B_4 := 4/5 X^5 + 4/3 X^3 + \frac{8}{15} X$$

$$B_5 := 5/6 X^6 + 5/3 X^4 + 1/2 + 4/3 X^2$$

$$B_6 := 6/7 X^7 + 2 X^5 + 8/3 X^3 + \frac{32}{21} X$$

$$B_7 := \frac{7}{8} X^8 + 7/3 X^6 + \frac{17}{8} + 16/3 X^2 + 14/3 X^4$$

$$B_8 := \frac{8}{9} X^9 + 8/3 X^7 + \frac{128}{9} X^3 + \frac{128}{15} X + \frac{112}{15} X^5$$

$$B_9 := \frac{9}{10} X^{10} + 3 X^8 + \frac{31}{2} + \frac{192}{5} X^2 + 32 X^4 + \frac{56}{5} X^6$$

$$B_{10} := \frac{10}{11} X^{11} + 10/3 X^9 + 128 X^3 + \frac{2560}{33} X + 64 X^5 + 16 X^7$$

$$B_{11} := \frac{11}{12} X^{12} + 11/3 X^{10} + \frac{1280}{3} X^2 + \frac{352}{3} X^6 + 352 X^4 + 22 X^8 + \frac{691}{4}$$

$$B_{12} := \frac{12}{13} X^{13} + 4 X^{11} + \frac{1415168}{1365} X + \frac{5120}{3} X^3 + \frac{1408}{7} X^7 + \frac{4224}{5} X^5 + \frac{88}{3} X^9$$

$$B_{13} := \frac{13}{14} X^{14} + 13/3 X^{12} + \frac{707584}{105} X^2 + \frac{9152}{5} X^6 + \frac{16640}{3} X^4 + \frac{2288}{7} X^8 + \frac{572}{15} X^{10} + \frac{5461}{2}$$

$$B_{14} := \frac{14}{15} X^{15} + 14/3 X^{13} + \frac{57344}{3} X + \frac{1415168}{45} X^3 + \frac{18304}{5} X^7 + \frac{46592}{3} X^5 + \frac{4576}{9} X^9 + \frac{728}{15} X^{11}$$

```
> for n from 1 to 13 do
> A[n+1]:=simplify(((n+1)/(n+2))*(X*A[n]+sum(coeff(B[n],X,k)*A[k],k=0..n)));od;
```

$$A_2 := 1/3 X^3 + 1/3 X$$

$$A_3 := 1/4 X^4 + 1/2 X^2$$

$$A_4 := 1/5 X^5 + 2/3 X^3 + \frac{7}{15} X$$

$$A_5 := 1/6 X^6 + 5/6 X^4 + 7/6 X^2$$

$$A_6 := 1/7 X^7 + X^5 + 7/3 X^3 + \frac{31}{21} X$$

$$A_7 := 1/8 X^8 + 7/6 X^6 + \frac{49}{12} X^4 + \frac{31}{6} X^2$$

$$A_8 := 1/9 X^9 + 4/3 X^7 + \frac{98}{15} X^5 + \frac{124}{9} X^3 + \frac{127}{15} X$$

$$A_9 := 1/10 X^{10} + 3/2 X^8 + \frac{49}{5} X^6 + 31 X^4 + \frac{381}{10} X^2$$

$$A_{10} := 1/11 X^{11} + 5/3 X^9 + 14 X^7 + 62 X^5 + 127 X^3 + \frac{2555}{33} X$$

$$A_{11} := 1/12 X^{12} + \frac{11}{6} X^{10} + \frac{77}{4} X^8 + \frac{341}{3} X^6 + \frac{1397}{4} X^4 + \frac{2555}{6} X^2$$

$$A_{12} := 1/13 X^{13} + 2 X^{11} + \frac{77}{3} X^9 + \frac{1364}{7} X^7 + \frac{4191}{5} X^5 + \frac{5110}{3} X^3 + \frac{1414477}{1365} X$$

$$A_{13} := 1/14 X^{14} + \frac{13}{6} X^{12} + \frac{1001}{30} X^{10} + \frac{4433}{14} X^8 + \frac{18161}{10} X^6 + \frac{33215}{6} X^4 + \frac{1414477}{210} X^2$$

$$A_{14} := 1/15 X^{15} + 7/3 X^{13} + \frac{637}{15} X^{11} + \frac{4433}{9} X^9 + \frac{18161}{5} X^7 + \frac{46501}{3} X^5 + \frac{1414477}{45} X^3 + \frac{57337}{3} X$$

## C. Transformée par T d'une fonction dérivée

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0,1]$ :

$$T(f'(x)) = [T(f(x))]' + \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - \frac{f(x) - f(0)}{x}. \quad (1)$$

Par définition de  $g = T(f)$ :  $g(x) = \int_0^1 \frac{f(t) - f(x)}{t - x} dt$ .

$f$  étant supposée de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0,1]$ , le théorème de dérivation sous l'intégrale

s'applique ici et conduit à:  $g'(x) = \int_0^1 \frac{f'(x)(x - t) - (f(x) - f(t))}{(x - t)^2} dt$ .

Écrivons alors:

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{f'(x) - f'(t)}{x - t} dt + \int_0^1 \frac{f'(x)(x - t) - (f(x) - f(t))}{(x - t)^2} dt.$$

Soit encore:

$$g'(x) = T(f'(x)) + \left[ \frac{f(t) - f(x)}{x - t} \right]_0^1 = T(f'(x)) + \frac{f(1) - f(x)}{x - 1} - \frac{f(0) - f(x)}{x}.$$

Ceci donne bien la formule de transfert annoncée. Rappelons que pour  $f$  de

classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0,1]$  :

$$\int_0^1 f(x) \ln \left( \frac{x}{1-x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 g(x) dx \quad (1)$$

Si  $f$  est supposée de classe  $\mathcal{C}^2$  notons  $g_1 = T(f')$ , définie d'après ce qui précède par :

$$g_1(x) = g'(x) + \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

En appliquant la formule (1) à la fonction  $f'$  on obtient :

$$\int_0^1 f'(x) \ln \left( \frac{x}{1-x} \right) dx = \frac{1}{2} \left( g(1) - g(0) + \int_0^1 \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} dx - \int_0^1 \frac{f(x) - f(0)}{x} dx \right).$$

Soit par définition même de  $g$  :

$$\int_0^1 f'(x) \ln \left( \frac{x}{1-x} \right) dx = g(1) - g(0).$$

La formule ci dessus se généralise sous la forme suivante, à l'aide d'une démonstration par récurrence.

**Théorème :** Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[0,1]$ , avec  $n \geq 1$  :

$$\int_0^1 f^{(n)}(x) \ln \left( \frac{x}{1-x} \right) dx = g^{(n-1)}(1) - g^{(n-1)}(0) \\ + H_{n-1} [f^{(n-1)}(1) + f^{(n-1)}(0)] + \sum_{k=0}^{k=n-2} \alpha_n^k [f^{(k)}(0) + (-1)^{n+k+1} f^{(k)}(1)]$$

Avec  $H_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$  et  $\alpha_n^k = (n-k-2)! [1 + (-1)^{n-k}] + \sum_{j=0}^{j=k-1} \frac{(n-2-j)!}{(k-j)!}$  ;

$$\alpha_{n+1}^k = \alpha_n^{k-1} + \frac{(n-1)!}{k!}.$$

Le point central de la démonstration est l'étude des dérivées successives des fonctions

$$x \mapsto q_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \text{ et } x \mapsto q_1(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1}.$$

Il suffit en fait de faire l'étude pour  $q_0$ , puis d'utiliser un changement de variable élémentaire.

Si on suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[0,1]$ , Leibniz donne sur  $]0,1[$  :

$$q_0^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! [f(x) - f(0)]}{x^{n+1}} + \sum_{k=0}^{k=n-1} C_n^k (-1)^k k! \frac{f^{(n-k)}(x)}{x^{k+1}}.$$

Pour l'étude en 0, écrivons  $q_0(x) = \int_0^1 f'(tx) dt$ . Il vient alors par dérivations successives sous l'intégrale: Pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ :

$$q_0^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(xt) dt.$$

Donc à l'origine:  $q_0^{(k)}(0) = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}$ . On obtient de même pour  $q_1$ :

$$\text{Sur } [0,1[, q_1^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! [f(x) - f(1)]}{(x-1)^{n+1}} + \sum_{k=0}^{k=n-1} C_n^k (-1)^k k! \frac{f^{(n-k)}(x)}{(x-1)^{k+1}} \text{ et}$$

$$q_1^{(k)}(1) = \frac{f^{(k+1)}(1)}{k+1}.$$

Supposons alors la formule en question vraie à l'ordre  $n$  et examinons pour une fonction  $f$  de classe  $C^{n+1}$  sur  $[0,1]$  l'intégrale

$$I_{n+1} = \int_0^1 f^{(n+1)}(x) \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) dx.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, et puisque  $f'$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[0,1]$  on pourra écrire:

$$I_{n+1} = g_1^{(n-1)}(1) - g_1^{(n-1)}(0) + H_{n-1} [f^{(n)}(1) + f^{(n)}(0)] + \sum_{k=0}^{k=n-2} \alpha_n^k [f^{(k+1)}(0) +$$



$$(-1)^{n+k+1} f^{(k+1)}(1)].$$

avec  $g_1 = T(f')$  définie par  $g_1(x) = g'(x) + q_1(x) - q_0(x)$ .

On en déduit avec ce qui précède :

$$g_1^{(n-1)}(1) =$$

$$g^{(n)}(1) + \frac{f^{(n)}(1)}{n} - (-1)^{n-1} (n-1)! [f(1) - f(0)] - \sum_{k=0}^{k=n-2} C_{n-1}^k (-1)^k k! f^{(n-1-k)}(1).$$

$$g_1^{(n-1)}(0) =$$

$$g^{(n)}(0) + (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{f(0) - f(1)}{(-1)^n} + \sum_{k=0}^{k=n-2} C_{n-1}^k (-1)^k k! \frac{f^{(n-1-k)}(0)}{(-1)^{k+1}} - \frac{f^{(n)}(0)}{n}.$$

Commençons par regrouper

$$H_{n-1}[f^{(n)}(1) + f^{(n)}(0)] + \frac{f^{(n)}(1)}{n} + \frac{f^{(n)}(0)}{n} = H_n[f^{(n)}(1) + f^{(n)}(0)].$$

Puis écrivons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n-2} C_{n-1}^k (-1)^k k! f^{(n-1-k)}(1) \\ = \sum_{q=0}^{q=n-2} C_{n-1}^{n-2-q} (-1)^{n-2-q} (n-2-q)! f^{(q+1)}(1) \\ = (-1)^n (n-1)! \sum_{q=0}^{q=n-2} \frac{(-1)^q f^{(q+1)}(1)}{(q+1)!} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-2} C_{n-1}^k k! f^{(n-1-k)}(0) = (n-1)! \sum_{q=0}^{q=n-2} \frac{f^{(q+1)}(0)}{(q+1)!}.$$

Après regroupements on

obtient :

$$I_{n+1} = g^{(n)}(1) - g^{(n)}(0) + H_n[f^{(n)}(1) + f^{(n)}(0)] + S_{n+1} \text{ avec } S_{n+1} \text{ définie par :}$$

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{k=n-1} \left( \alpha_n^{k-1} + \frac{(n-1)!}{k!} \right) [f^{(k)}(0) + (-1)^{n+2+k} f^{(k)}(1)] + (n-1)! (1 + (-1)^{n+1}) [f(0) - f(1)].$$

Il suffit alors de poser pour  $k \geq 1$ ,  $\alpha_{n+1}^k = \alpha_n^{k-1} + \frac{(n-1)!}{k!}$  et

$\alpha_{n+1}^0 = (n-1)![1 + (-1)^{n+1}]$  pour obtenir la formule souhaitée à l'ordre suivant  $n+1$ .

Voici le tableau des premiers coefficients.

$n \downarrow k \rightarrow$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	2						
<b>3</b>	0	3					
<b>4</b>	4	2	4				
<b>5</b>	0	10	5	5			
<b>6</b>	48	24	22	9	6		
<b>7</b>	0	168	84	42	14	7	
<b>8</b>	420	720	528	204	72	20	8

On établit facilement par télescopage

$$\alpha_n^k = (n-k-2)![1 + (-1)^{n-k}] + \sum_{j=0}^{j=k-1} \frac{(n-2-j)!}{(k-j)!}.$$

L'analyse des différences premières sur les diagonales suggère une formule synthétique que l'on décode assez facilement sur les premiers termes et que l'on peut prouver ensuite facilement à l'aide de la relation de récurrence générant les

$$\alpha_n^k.$$

$$\alpha_n^k = (n - k - 2)! [C_{n-1}^k + (-1)^{n-k}].$$

### Une première application :

Pour  $f(x) = x^n$  on obtient la formule originale :

$$H_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^{n-k} C_{n-1}^k}{(n-k)(n-k-1)}.$$

### Calcul des coefficients de Fourier de la réductrice

On se rappelle qu'une base orthonormale de  $H$  est donnée par les polynômes de Legendre normalisés, s'écrivant :

$$P_n(x) = \frac{\sqrt{2n+1}}{n!} f_n^{(n)}(x), \text{ avec } f_n(x) = x^n(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^{n+k}.$$

La transformée par  $T$  de  $f_n$  est égale à

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^k \sum_{j=0}^{j=n+k-1} \frac{x^j}{n+k-j} = \sum_{j=0}^{j=2n-1} \left( \sum_{k=j+1-n}^{k=n} \frac{(-1)^k C_n^k}{n+k-j} \right) x^j.$$

$$\text{On en déduit } g_n^{(n-1)}(0) = (n-1)! \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{(n-1)!}{n+1}.$$

Or on vérifie facilement que pour tout polynôme  $f$ ,

$$T(f(1-x)) = -[T(f)](1-x).$$

La fonction  $f_n$  étant symétrique par rapport au milieu de  $[0,1]$ , on en déduit donc

$$\text{que } g_n(x) = -g_n(1-x) \text{ et par suite que } g_n^{(n-1)}(1) = (-1)^n g^{(n-1)}(0).$$

Ainsi par application du théorème établi précédemment, on en déduit :

$$\int_0^1 f_n^{(n)}(x) \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{2(n-1)!}{n+1} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

En effet toutes les dérivées successives intervenant pour  $f_n$  sont nulles en 0 et 1.

Etudions alors les moments de la réductrice  $\varphi$ .

$$\text{Par définition : } \lambda_n = \langle \varphi | P_n \rangle_\rho = \frac{2\sqrt{2n+1}}{n!} \int_0^1 f_n^{(n)}(x) \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) dx.$$

$$\text{On en déduit : } \lambda_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{4\sqrt{2n+1}}{n(n+1)} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ainsi dans  $\mathcal{L}^2([0,1])$  on a le développement dans la base des polynômes de Legendre :

$$\varphi_0(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = -\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sqrt{4n+3}}{(2n+1)(n+1)} P_{2n+1}(x).$$

On en déduit par exemple les égalités suivantes :

⊃ En utilisant  $\|\varphi_0\|^2 = \int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) dx = \frac{\pi^2}{3}$ , il vient :

$$\frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(4n+3)}{(2n+1)^2(n+1)^2}.$$

⊃ En utilisant  $\langle \varphi_0(x) | x^k \rangle = \frac{H_k}{k+1}$  et

$$P_{2n+1}(x) = \sqrt{4n+3} \sum_{k=0}^{k=2n+1} (-1)^k C_{2n+1}^k C_{2n+1+k}^k x^k.$$

Quel que soit l'entier  $n$  :

$$\sum_{k=0}^{k=2n+1} (-1)^k C_{2n+1}^k C_{2n+1+k}^k \frac{H_k}{k+1} = \frac{-1}{(2n+1)(n+1)}.$$

L'utilisation de produits scalaires avec la réductrice peut conduire à des égalités étonnantes.

Considérons une fonction  $f$  de  $\mathcal{L}^2([0,1])$  dont on connaît les coefficients de Fourier  $c_n(f)$  relativement à la base des polynômes de Legendre

$$P_n(x) = \frac{\sqrt{2n+1}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n(1-x)^n).$$

$$\text{De } \begin{cases} f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n(f) P_n(x) \\ \varphi(x) = -2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sqrt{4n+3}}{(2n+1)(n+1)} P_{2n+1}(x) \end{cases} \quad \text{on déduit par produit scalaire :}$$

$$\langle \varphi | f \rangle = \langle \frac{\rho}{\mu} | T(f) \rangle_{\mu} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(y) - f(x)}{y - x} dx dy =$$

$$-2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sqrt{4n+3}}{(2n+1)(n+1)} c_{2n+1}(f).$$

Or les coefficients de Fourier s'évaluent facilement par intégrations par parties successives.

$$\text{On obtient : } c_{2n+1}(f) = -\frac{\sqrt{4n+3}}{(2n+1)!} \int_0^1 f^{(2n+1)}(x) [x(1-x)]^{2n+1} dx.$$

Ceci nous donne :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{f(y) - f(x)}{y - x} dx dy =$$

$$2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{4n+3}{(2n+1)!(2n+1)(n+1)} \int_0^1 f^{(2n+1)}(x) [x(1-x)]^{2n+1} dx.$$

Examinons le cas d'une fonction puissance  $f(x) = x^\alpha$ , avec  $\alpha > -1$ .

On obtient facilement par intervention des fonctions Eulériennes :

$$\int_0^1 f^{(2n+1)}(x)[x(1-x)]^n dx = (2n+1)! \frac{\prod_{k=0}^{k=2n} (\alpha - k)}{\prod_{k=2n+2} (\alpha + k)}.$$

D'où  $\int_0^1 \int_0^1 \frac{f(y) - f(x)}{y - x} dx dy = 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{4n+3}{(2n+1)(n+1)} \times u(n, \alpha)$  en posant

$$u(n, \alpha) = \frac{\prod_{k=0}^{k=2n} (\alpha - k)}{\prod_{k=1} (\alpha + k)}.$$

Le cas particulier  $\alpha = \frac{1}{2}$  est intéressant, il conduit à l'égalité :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n, \text{ les rationnels } u_n \text{ étant générés par :}$$



$$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{5} \\ u_{n+1} = \frac{(4n+1)(2n+1)(n+1)}{(4n+9)(2n+3)(n+2)} \times u_n \end{cases}$$

Ces fractions sous forme irréductibles ont un numérateur valant alternativement 2 ou 1.

Ainsi  $u_{2n} = \frac{2}{a_n}$  et  $u_{2n+1} = \frac{1}{b_n}$  avec pour premières valeurs des dénominateurs :

$$a_0 = 5, a_1 = 1755, a_2 = 16065, a_3 = 65975, a_4 = 186813, a_5 = 426195, a_6 = 844025, \dots$$

$$b_0 = 135, b_1 = 3094, b_2 = 17325, b_3 = 57420, b_4 = 144115, b_5 = 304290, b_6 = 570969, \dots$$

MAPLE donne comme valeur approchée :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 2 \left[ \frac{2}{5} + \frac{1}{135} + \frac{2}{1755} + \frac{1}{3094} + \frac{2}{16065} + \frac{1}{17325} + \dots \right] = 0.8182741852 \dots$$

On peut en fait facilement expliciter directement ces entiers. En utilisant la relation entre deux termes successifs on obtient  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{P_{n+1}}{P_n}$  avec

$$P_n = (2n+1)(4n+1)(8n+1)(8n+5).$$

Comme  $a_0 = 5 = P_0$ , il vient  $a_n = P_n$  puis  $b_n = (n+1)(4n+3)(8n+5)(8n+9)$ .

La formule donnant l'intégrale double ci-dessus s'exprime alors par :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{11 + 20n + 16n^2}{(n+1)(2n+1)(4n+1)(4n+3)(8n+1)(8n+9)}.$$

$$\text{Or } \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{ts}{t+s} dt ds = \frac{8}{3}(1 - \ln(2)).$$

Ceci nous donne une belle convergence de série vers  $\ln(2)$ .

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}(1 - \ln(2)) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{11 + 20n + 16n^2}{(n+1)(2n+1)(4n+1)(4n+3)(8n+1)(8n+9)} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{135} + \frac{2}{1755} + \frac{1}{3094} + \frac{2}{16065} + \frac{1}{17325} + \frac{2}{65975} + \frac{1}{57420} + \frac{2}{186813} + \dots \end{aligned}$$

### ⊃ Généralisation de l'application.

On peut se demander naturellement s'il existe d'autres valeurs de l'exposant  $\alpha$  conduisant à des formules similaires à convergence rapide. La réponse est positive.

On montre en effet facilement en reprenant les calculs précédents pour un

exposant  $\alpha$  quelconque, la formule : 
$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{y^\alpha - x^\alpha}{y - x} dx dy = 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} q_n,$$

les termes  $q_n$  étant explicités par :

$$q_n = \frac{(4n+3)\alpha}{(n+1)(2n+1)(\alpha+2n+1)(\alpha+2n+2)} \prod_{k=1}^{k=2n} \left( \frac{k-a}{k+a} \right) \text{ (avec } q_0 = \frac{3\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \text{)}$$

On a donc déjà dans tous les cas avec d'Alembert une convergence de série en  $\frac{\alpha}{n^3}$ .

Si on cherche maintenant des rationnels  $\alpha = \frac{p}{q}$  de façon que les quotients  $q_n$  se simplifient par un procédé d'érosion diagonale, on est amené à choisir les entiers  $p$  et  $q$  tels que l'équation diophantienne  $q \times k_2 - p = q \times k_1 + p$  admette des solutions non isolées et non triviales. On voit vite que le dénominateur  $q$  doit alors prendre la valeur 2 et que  $k_2 = k_1 + p$ . L'entier  $p$  sera bien sûr pris impair.

On en déduit alors :  $\prod_{k=1}^{k=2n} \left( \frac{2k-p}{2k+p} \right) = \prod_{k=1}^{k=p} \frac{2k-p}{2k-p+4n}$ , puis l'expression simplifiée de  $q_n$  :

$$q_n = \frac{2(4n+3)p}{(n+1)(2n+1)(4n+p+2)(4n+p+4)} \prod_{k=1}^{k=p} \frac{2k-p}{4n+2k-p}$$

À une constante multiplicative près la convergence est alors en  $\frac{1}{n^{p+3}}$ .

Par exemple pour  $p = 3$  on obtient

$$-18$$

$$q_n = \frac{-18}{(n+1)(2n+1)(4n-1)(4n+1)(4n+5)(4n+7)}.$$

On trouve facilement par changements de variables élémentaires :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{y^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{y-x} dx dy = \frac{32}{15} - \frac{8 \ln(2)}{5}.$$

D'où l'égalité :

$$\frac{6 \ln(2) - 8}{135} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)(4n-1)(4n+1)(4n+5)(4n+7)}.$$

On peut plus généralement évaluer l'intégrale  $G_p = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^{\frac{p}{2}} - x^{\frac{p}{2}}}{y-x} dx dy$  pour  $p$  impair quelconque.

Voici les grandes lignes du calcul.

- On écrit d'abord  $G_p = 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^p - x^p}{y^2 - x^2} xy dx dy$ .
- Pour  $p$  et  $q$  entiers considérons  $\alpha(p, q) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^p y^q}{x+y} dx dy$ . En passant en coordonnées polaires, on obtient facilement :

$$\alpha(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^p(\theta) + \tan^q(\theta)}{\cos^2(\theta)(1 + \tan(\theta))} d\theta = \int_0^1 \frac{t^p + t^q}{1 + t} dt.$$

- Par décomposition élémentaire de fraction on poursuit avec :

$$\alpha(p, q) = \frac{1}{p + q + 1} [((-1)^p + (-1)^q) \ln(2) + A(p) + A(q)] \text{ avec}$$

$$A(n) = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

- Ecrivons alors  $G_p = 4 \sum_{k=0}^{k=p-1} \alpha(p-k, k+1) = \frac{4}{p+2} [-2 \ln(2) + 2 \sum_{k=1}^{k=p} A(k)].$

$$2[A(1) + \dots + A(p)] = \sum_{k=1}^{k=p} [1 - (-1)^k] \times \frac{1}{k} = 2 \sum_{j=0}^{j=\frac{p-1}{2}} \frac{1}{2j+1}.$$

Pour plus de commodité :  $p \leftarrow 2p + 1$  avec  $p$  entier quelconque  $\geq 2$ .

$$\text{On peut alors écrire } G_{2p+1} = \frac{8}{2p+3} \left[ -\ln(2) + \sum_{j=0}^{j=p} \frac{1}{2j+1} \right].$$

En décomposant cette intégrale en série comme on l'a étudié précédemment et après simplifications évidentes apparaît enfin la très belle formule B.B.P suivante :

$$\ln(2) - \sum_{j=0}^{j=p} \frac{1}{2j+1} = \lambda_p \sum \frac{1}{q(n,p)} \text{ avec}$$

$$\lambda_p = (-1)^{p+1} [1 \times 3 \times \dots \times (2p+1)]^2 (2p+3).$$

$$q(n,p) =$$

$$2(n+1)(2n+1)(4n-3)(4n+2p+1)(4n+2p+3)(4n+2p+5)(16n^2-1)Q(n,p).$$

$$Q(n,p) = \prod_{j=2}^{j=p-1} [16n^2 - (2j+1)^2].$$

Par exemple pour  $p=2$  on obtient :

$$\frac{23}{15} - \ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1575}{2(n+1)(2n+1)(4n-3)(4n-1)(4n+1)(4n+5)(4n+7)(4n+9)}$$