

Les mesures secondaires

Chapitre 1

Roland GROUX, agrégé de l'Université
Professeur en classe préparatoire
Lycée Rouvière de Toulon

1^{er} janvier 2006

Je me suis amusé un jour, vers les années 1980, à étudier les suites de réels définies de proche en proche par le procédé récurrent : $x_{n+3} = \frac{x_n x_{n+2} - (x_{n+1})^2}{x_n + x_{n+2} - 2x_{n+1}}$

Autrement dit les suites pour lesquelles le procédé d'accélération de convergence d'Aitken revient à évaluer un nouveau terme.

On montre facilement que si $x = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$ n'est pas un entier négatif, la suite en

question converge vers $\ell = x_0 + (x_1 - x_0) \left[1 - \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{x(x+1)\dots(x+k)} \right]$.

De plus, si l'on pose $f(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{x(x+1)\dots(x+k)}$, on obtient l'expression


intégrale valable pour $x > 0$:

$f(x) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} e^{-t} dt$, ainsi que la relation fonctionnelle

$f(x+1) = 1 - xf(x)$.

Cette équation peut se traduire en introduisant la fonction gamma, sous la forme :

$$\boxed{\frac{f(x+1)}{\Gamma(x+1)} + \frac{f(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\Gamma(x+1)}}$$

La fonction gamma a donc quelque part un subtil rapport avec le procédé 

d'accélération d'Aitken-Romberg.

▮ Parmi les calculs de l'intégrale classique $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi$, il en est un qui consiste à découper l'ensemble des réels \mathbb{R} en intervalles de longueur π , ce qui conduit à l'expression :

$$I = \int_0^{\pi} \sin(x) \left[\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2 \pi^2} \right] dx.$$

On conclut alors grâce aux séries de Fourier qui permettent de condenser la somme entre crochets en $\frac{1}{\sin(x)}$.

J'ai eu alors l'idée d'appliquer ce principe de découpage pour évaluer d'abord

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\Gamma(x)} dx, \text{ car apparaissait naturellement la somme}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{x(x+1)\dots(x+k)} \text{ présentée plus haut.}$$

J'ai ensuite généralisé ce calcul pour étudier $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-px}}{\Gamma(x)} dx$, c'est à dire la transformée de Laplace de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\Gamma(x)}$. Voyons en détail la

progression de cette analyse.

Étude de la transformée de Laplace de $x \mapsto \frac{1}{\Gamma(x)}$

A. Définition, convergence, dérivabilité.

On définit classiquement cette transformée de Laplace par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-px} dx}{\Gamma(x)}, \text{ avec } p \text{ paramètre complexe.}$$

1. Convergence de l'intégrale

⊃ La borne réelle 0 ne pose aucun problème puisque quel que soit p :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-px}}{\Gamma(x)} = 0$$

En effet, au voisinage de 0, $\Gamma(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$.

⊃ Pour la borne infinie, envisageons d'abord p réel.

- Si $p > 0$, on conclut facilement en se rappelant que sur $]0, +\infty[$ la fonction gamma est minorée par un réel $m > 0$. On aura donc pour tout $x > 0$:

$$0 < \frac{e^{-px}}{\Gamma(x)} \leq \frac{1}{m} e^{-px}$$

- Si $p \leq 0$, utilisons la relation classique $\Gamma(x+2) = (x+1)x\Gamma(x)$. Elle ramène

l'étude de la convergence de $\int_2^{+\infty} \frac{e^{-px}}{\Gamma(x)} dx$ à celle de

$$e^{-2p} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-px} dx}{(x+1)x\Gamma(x)}.$$

Vu la convergence évidente de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)x}$, il nous suffit d'établir que la

fonction $x \mapsto g(x) = \frac{e^{-px}}{\Gamma(x)}$ admet une limite réelle en $+\infty$.

Or $g'(x) = g(x) \left[-p - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right]$, et pour $x > 0$:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(x+n)} \quad (\text{avec } \gamma \text{ constante d'Euler}).$$

On en déduit la minoration: $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \geq -\gamma - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{n}$ et par suite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = +\infty.$$

La fonction g est donc positive et décroissante sur un voisinage de $+\infty$, donc admet bien une limite réelle en $+\infty$.

Enfin pour p complexe quelconque, la convergence est absolue car

$\left| \frac{e^{-px}}{\Gamma(x)} \right| = \frac{e^{-[\operatorname{Re}(p)]x}}{\Gamma(x)}$. La transformée de Laplace F est donc définie sur le plan complexe entier.

2. Dérivabilité de F

Écrivons pour p complexe: $F(p) = \int_0^1 \frac{e^{-px} dx}{\Gamma(x)} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-px} dx}{\Gamma(x)}$

→ Pour l'intégrale sur le compact $[0,1]$, la dérivabilité par rapport au paramètre p s'obtient simplement en invoquant la continuité sur $[0,1] \times \mathbb{C}$ de la fonction :

$$(x,p) \mapsto \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{e^{-px}}{\Gamma(x)} \right) = \frac{-xe^{-px}}{\Gamma(x)}.$$

On prolonge bien sûr $\frac{1}{\Gamma}$ par continuité en 0 par $\left(\frac{1}{\Gamma}\right)(0) = 0$.

→ Pour $G(p) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-px} dx}{\Gamma(x)} = e^{-p} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-px} dx}{x\Gamma(x)}$, remarquons que

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{e^{-px}}{x\Gamma(x)} \right) = \frac{-e^{-px}}{\Gamma(x)}.$$

Plaçons nous alors sur la bande de plan complexe définie par $a \leq \operatorname{Re}(p) \leq b$,

avec a et b réels quelconques. Sur cette zone: $\left| \frac{e^{-px}}{\Gamma(x)} \right| \leq \frac{e^{-ax}}{\Gamma(x)}$. Cette majoration

par une fonction d'intégrale convergente sur $[0, +\infty[$ entraîne la dérivabilité par rapport à p en tout point de la bande ouverte $a < \operatorname{Re}(p) < b$ de la fonction G et

donne donc vu la notion de localité :

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbb{C} : G'(p) &= e^{-p} \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-px} dx}{\Gamma(x)} - e^{-p} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-px} dx}{x\Gamma(x)} \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-p(x+1)} dx}{x\Gamma(x)}\end{aligned}$$

Par décalage élémentaire, cela s'écrit simplement : $G(p) = \int_0^{+\infty} \frac{-xe^{-px} dx}{\Gamma(x)}$.

La transformée de Laplace F est donc dérivable sur tout le plan complexe, suivant la formule :

$$\forall p \in \mathbb{C}, F'(p) = \int_0^{+\infty} \frac{-xe^{-px} dx}{\Gamma(x)}.$$

Plus généralement on peut prouver facilement par récurrence que pour tout entier n , la transformée F est dérivable à l'ordre n sur \mathbb{C} suivant la formule :

$$F^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} \frac{(-x)^n e^{-px} dx}{\Gamma(x)}.$$

Choisissons en effet un réel $a > 0$ et plaçons p sur la zone ouverte définie par $\operatorname{Re}(p) > -a$.

On peut alors majorer pour $x > 0$: $\left| \frac{(-x)^n e^{-px}}{\Gamma(x)} \right| \leq \frac{x^n e^{ax}}{\Gamma(x)}$.

Or pour x et a positifs: $e^{ax} \geq \frac{(ax)^n}{n!}$. On en déduit: $\left| \frac{(-x)^n e^{-px}}{\Gamma(x)} \right| \leq \frac{n! e^{2ax}}{a^n \Gamma(x)}$.

On conclut avec la convergence étudiée précédemment de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{2ax} dx}{\Gamma(x)}$.

B. Évaluation de $F(p)$ par découpage, lorsque p est réel.

On commence par une partition classique de $[0, +\infty[$ en segments de longueur 1.

$$\text{Ainsi: } F(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{e^{-px} dx}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{e^{-px} dx}{\Gamma(x)}$$

On ramène ensuite l'intégrale sur chacun des segments en intégrale sur $[0,1]$ par translations élémentaires. Il vient alors:

$$\int_k^{k+1} \frac{e^{-px} dx}{\Gamma(x)} = e^{-pk} \int_0^1 \frac{e^{-px} dx}{\Gamma(x+k)} = e^{-pk} \int_0^1 \frac{e^{-px} dx}{\Gamma(x)x(x+1)\dots(x+k-1)}$$

Par sommations finies:

$$F(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-px}}{\Gamma(x)} \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{-pk}}{x(x+1)\dots(x+k-1)} \right] dx.$$

Ou encore, par décalages d'indices et en posant $\lambda = e^{-p}$:

$$F(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-px}}{\Gamma(x)} \left[1 + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{x(x+1)\dots(x+k)} \right] dx$$

→ On utilise alors l'égalité, obtenue facilement à l'aide d'intégrations par parties répétées :

$$\forall x > 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \frac{\lambda^k}{x(x+1)\dots(x+k)} = \int_0^1 (1-t)^{x-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dt.$$

Ceci nous donne $F(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-px}}{\Gamma(x)} \left[1 + \lambda \int_0^1 (1-t)^{x-1} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dt \right] dx.$

→ La suite de fonctions de variable t , $n \mapsto \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ converge uniformément

sur $[0,1]$ vers la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$. Vu la convergence de $\int_0^1 (1-t)^{x-1} e^{\lambda t} dt$ pour $x > 0$, on peut donc écrire que pour tout $x > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1-t)^{x-1} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dt = \int_0^1 (1-t)^{x-1} e^{\lambda t} dt.$$

Considérons alors la suite de fonctions de variable x définies sur $]0,1]$ par la formule

$$f_n(x) = \frac{e^{-px}}{\Gamma(x)} \left[1 + \lambda \int_0^1 (1-t)^{x-1} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dt \right]$$

Elle est croissante, vu que $\lambda > 0$ et converge simplement vers

$$\frac{e^{-px}}{\Gamma(x)} \left[1 + \lambda \int_0^1 (1-t)^{x-1} e^{\lambda t} dt \right].$$

On en déduit d'après le théorème de convergence monotone (Beppo-Levi), la première formule :

$$F(p) = \int_0^1 \frac{e^{-px}}{\Gamma(x)} \left[1 + \lambda \int_0^1 (1-t)^{x-1} e^{\lambda t} dt \right] dx$$

↪ Utilisons maintenant la formule des compléments :

$$\forall x \in]0,1[, \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

$$\text{Il vient } F(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{-px} \sin(\pi x) \Gamma(1-x) \left[1 + \lambda \int_0^1 (1-t)^{x-1} e^{\lambda t} dt \right] dx.$$

En changeant x en $1-x$:

$$F(p) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^1 e^{px} \sin(\pi x) \Gamma(x) \left[1 + \lambda \int_0^1 (1-t)^{-x} e^{\lambda t} dt \right] dx.$$

Nous allons décomposer en somme $F(p) = F_1(p) + F_2(p)$ et étudier séparément les deux facteurs. Vu la positivité des fonctions intervenant, on va pouvoir

facilement, grâce à Fubini, effectuer des échanges d'intégrale. Nous allons commencer par établir une première égalité :

$$\neg \quad F_1(p) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^1 e^{px} \sin(\pi x) \Gamma(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{(x + \lambda)e^{-x} dx}{x[(\ln(x) + p)^2 + \pi^2]}.$$

Partons de la définition intégrale de gamma : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du$.

On en déduit :

$$\int_0^1 e^{px} \sin(\pi x) \Gamma(x) dx = \int_0^1 e^{px} \sin(\pi x) \left(\int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du \right) dx =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \left[\int_0^1 e^{px} u^x \sin(\pi x) dx \right] du.$$

L'intégrale sur $[0,1]$ est élémentaire, on obtient en effet grâce aux exponentielles complexes :

$$\frac{1}{2i} \left[\frac{e^{(p+\ln(u)+i\pi)x}}{p + \ln(u) + i\pi} - \frac{e^{(p+\ln(u)-i\pi)x}}{p + \ln(u) - i\pi} \right] = \frac{\pi(ue^p + 1)}{(p + \ln(u))^2 + \pi^2}.$$

Vu que $\lambda = e^{-p}$, on en déduit

$$F_1(p) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^1 e^{px} \sin(\pi x) \Gamma(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{(u + \lambda)e^{-u} du}{u[(p + \ln(u))^2 + \pi^2]} \text{ ce qu'il fallait}$$

démontrer.

↪ Nous allons maintenant effectuer un travail identique pour l'autre intégrale

et montrer :

$$F_2(p) = \frac{\lambda^2}{\pi} \int_0^1 e^{px} \sin(\pi x) \Gamma(x) \left(\int_0^1 (1-t)^{-x} e^{\lambda t} dt \right) dx$$
$$= \lambda \int_0^{+\infty} \frac{(e^{x+\lambda} - 1)e^{-x} dx}{x[(\ln(x) + p)^2 + \pi^2]}$$

Une première permutation transforme l'intégrale étudiée en :

$$F_2(p) = \frac{\lambda^2}{\pi} \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{px} \sin(\pi x) \Gamma(x) (1-t)^{-x} dx \right) e^{\lambda t} dt = \frac{\lambda^2}{\pi} \int_0^1 K(t) e^{\lambda t} dt.$$

Puis, par explicitation de gamma, on transforme l'intégrale de variable x en :

$$K(t) = \int_0^1 e^{px} \sin(\pi x) (1-t)^{-x} \left(\int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du \right) dx$$
$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{px} \sin(\pi x) (1-t)^{-x} u^x dx \right) \frac{e^{-u}}{u} du$$

Sur l'intervalle $[0,1]$ on évalue facilement une primitive, il suffit de reprendre le calcul effectué dans le paragraphe précédent en remplaçant formellement u par

$\frac{u}{1-t}$ car $(1-t)^{-x} u^x = e^{x \ln(\frac{u}{1-t})}$. Cela nous conduit à :

$$J(u) = \int_0^1 e^{px} \sin(\pi x) (1-t)^{-x} u^x dx = \frac{\pi \left[\frac{u}{1-t} e^p + 1 \right]}{\left[p + \ln \left(\frac{u}{1-t} \right) \right]^2 + \pi^2}, \text{ ceci pour}$$

$t \in [0, 1[$ et $u \in]0, +\infty[$.

D'où l'égalité

$$K(t) = \int_0^{+\infty} J(u) \frac{e^{-u}}{u} du = \pi \int_0^{+\infty} \frac{\left[\frac{u}{1-t} e^p + 1 \right]}{\left[p + \ln \left(\frac{u}{1-t} \right) \right]^2 + \pi^2} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Le changement de variable $u = (1-t)x$ donne :

$$\int_0^{+\infty} J(u) \frac{e^{-u}}{u} du = \pi \int_0^{+\infty} \frac{[xe^p + 1]}{[p + \ln(x)]^2 + \pi^2} \frac{e^{-x(1-t)}}{x} dx.$$

$$\text{Ainsi } F_2(p) = \frac{\lambda^2}{\pi} \int_0^1 K(t) e^{\lambda t} dt = \lambda \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} \frac{(x + \lambda) e^{-x(1-t)} dx}{x([p + \ln(x)]^2 + \pi^2)} \right) e^{\lambda t} dt$$

Un nouvel échange des bornes nous donne enfin

$$F_2(p) = \lambda \int_0^{+\infty} \frac{(x + \lambda)e^{-x}}{x([\rho + \ln(x)]^2 + \pi^2)} \left(\int_0^1 e^{(\lambda+x)t} dt \right) dx$$
$$= \lambda \int_0^{+\infty} \frac{(e^{x+\lambda} - 1)e^{-x} dx}{x([\rho + \ln(x)]^2 + \pi^2)}$$

→ La synthèse des deux transformations nous donne la formule, toujours dans le cas où p est une variable réelle :

$$F(p) = F_1(p) + F_2(p) = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x} + \lambda e^\lambda}{x([\rho + \ln(x)]^2 + \pi^2)} dx. \text{ Ceci se transforme}$$

facilement en :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{[\ln(x) + \rho]^2 + \pi^2} + \lambda e^\lambda \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x([\ln(x) + \rho]^2 + \pi^2)}.$$

$$\text{Or } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x([\ln(x) + \rho]^2 + \pi^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t + \rho)^2 + \pi^2} = 1.$$

On a donc établi après bien des détours et permutations la formule valable pour tout réel p :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-px} dx}{\Gamma(x)} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{(\ln(x) + \rho)^2 + \pi^2} + e^{-p} e^{-p}.$$

C. Transformée de Stieltjes de la fonction $x \left[\ln^2(x) + \pi^2 \right]^{-1}$

1. Transformée de Laplace de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\Gamma(x+1)}$

On considère ici un réel α quelconque et on étudie l'intégrale double :

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} e^{-px}}{\Gamma(x)} dx \right) dp.$$

D'après le théorème de Fubini, puisque les fonctions considérées sont positives, on peut écrire :

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-px} dp \right) \frac{e^{-\alpha x}}{\Gamma(x)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x\Gamma(x)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{\Gamma(x+1)} dx.$$

Sous la forme initiale, et vu l'expression de $F(p)$ trouvée précédemment, on a aussi :

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{[\ln(x) + \alpha + p]^2 + \pi^2} + e^{-(\alpha+p)} e^{e^{-(\alpha+p)}} \right) dp.$$

En permutant à nouveau les variables on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{[\ln(x) + \alpha + p]^2 + \pi^2} \right) dp =$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dp}{[\ln(x) + \alpha + p]^2 + \pi^2} \right) e^{-x} dx.$$

Ceci est encore égal à : $\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{\ln(x) + \alpha}{\pi}\right) \right] e^{-x} dx.$

En intégrant par parties, cette intégrale se transforme facilement en :

$$\frac{1}{\pi} \left[(1 - e^{-x}) \left[\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{\ln(x) + \alpha}{\pi}\right) \right] \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - 1}{[(\ln(x) + \alpha)^2 + \pi^2]} \frac{dx}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{[(\ln(x) + \alpha)^2 + \pi^2]} \frac{dx}{x}.$$

Pour l'autre terme qui constitue $J(\alpha)$ on a de manière évidente :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+p)} e^{e^{-(\alpha+p)}} dp = e^{e^{-\alpha}} - 1.$$

On en déduit par comparaison des deux modes de calcul de $J(\alpha)$ et pour tout réel α

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} dx}{\Gamma(x+1)} = e^{e^{-\alpha}} - 1 + \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{[(\ln(x) + \alpha)^2 + \pi^2]} \frac{dx}{x}.$$

2. Application au calcul d'une transformée de Stieltjes

En posant $\alpha = -\ln(t)$ dans la formule précédente on obtient :

$$\forall t > 0, \int_0^{+\infty} \frac{t^x dx}{\Gamma(x+1)} = e^t - 1 + \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{[(\ln(x) - \ln(t))^2 + \pi^2]} \frac{dx}{x}. \quad (F_t)$$

Considérons alors pour $p > 0$ l'intégrale double :

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^x dx}{\Gamma(x+1)} \right) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t^x e^{-pt} dt \right) \frac{dx}{\Gamma(x+1)}.$$

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{p^{x+1}} \frac{dx}{\Gamma(x+1)} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{p^{x+1}} = \frac{1}{p \ln(p)}.$$

Or en utilisant la formule (F_t) ci dessus on obtient :

$$I(p) = \int_0^{+\infty} (e^t - 1) e^{-pt} dt + \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{(1 - e^{-x}) dx}{[(\ln(x) - \ln(t))^2 + \pi^2] x} \right) e^{-pt} dt.$$

En changeant x en tx dans cette dernière intégrale on peut écrire :

$$I(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} + \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{(1 - e^{-tx}) dx}{[\ln^2(x) + \pi^2] x} \right) e^{-pt} dt.$$

En permutant à nouveau les bornes on arrive à

$$I(p) = \frac{1}{p(p-1)} + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt} - e^{-t(x+p)}}{[\ln^2(x) + \pi^2] x} dt dx.$$

$$\text{C'est à dire : } I(p) = \frac{1}{p(p-1)} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{p(x+p)[\ln^2(x) + \pi^2]}.$$

La comparaison des deux modes de calcul de $I(p)$ amène donc l'égalité suivante :

$$\forall p > 1, \frac{1}{\ln(p)} = \frac{1}{p-1} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+p)[\ln^2(x) + \pi^2]}$$

Cette formule déduite ici d'un long cheminement dans le calcul symbolique, se prolonge en fait à tout complexe p non réel négatif par prolongement analytique, la détermination de l'argument du logarithme étant choisie dans $] -\pi, \pi[$. On peut aussi la vérifier directement par le théorème des résidus. Nous allons voir que cette relation se révèle particulièrement efficace dans certains domaines. **Elle est en particulier une clef remarquable pour l'étude des polynômes orthogonaux de Legendre. Mais cela je ne l'ai vu que vingt ans après l'avoir découverte !**

Pour l'instant étudions quelques applications directes.

3. Explicitation intégrale des nombres de Bernoulli

⊃ En posant $p = e^t$ dans la formule précédente, on obtient pour tout réel $t > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} &= \frac{1}{e^t - 1} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + e^t)[\ln^2(x) + \pi^2]} \\ &= \frac{1}{e^t - 1} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + 1)[(\ln(x) + t)^2 + \pi^2]} \end{aligned}$$

Rappelons qu'une des générations des nombres de Bernoulli est celle de la

décomposition en série entière : $\forall t \in]0,1]$, $\frac{t}{e^t - 1} = 1 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\beta_k}{k!} t^k$.

On a donc avec ce qui précède :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)[(\ln(x)+t)^2 + \pi^2]} = - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\beta_k}{k!} t^{k-1}.$$

Si on pose $H(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)[(\ln(x)+t)^2 + \pi^2]}$, on aura donc pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{H^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} = -\frac{\beta_k}{k!}, \text{ c'est à dire } \beta_k = -kH^{(k-1)}(0).$$

↪ Décomposons

$$f_x(t) = \frac{1}{(\ln(x)+t)^2 + \pi^2} = \frac{1}{2i\pi} \left[\frac{1}{\ln(x)+t-i\pi} - \frac{1}{\ln(x)+t+i\pi} \right].$$

On en déduit que pour tout entier $k \geq 1$:

$$f_x^{(k-1)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2i\pi} \left[\frac{1}{(\ln(x)+t-i\pi)^k} - \frac{1}{(\ln(x)+t+i\pi)^k} \right].$$

Or on vérifie assez facilement que l'on est bien pour H dans les conditions d'application du théorème de dérivations successives sous l'intégrale. Il suffit de découper :

$$H(t) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)[(\ln(x)+t)^2 + \pi^2]} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)[(\ln(x)+t)^2 + \pi^2]}.$$

- Sur l'intervalle compact $[0,1]$ il n'y a pas de problèmes vu la continuité des fonctions $(x,t) \mapsto \frac{f_x^{(k-1)}(t)}{1+x}$.

- Sur l'intervalle $[1, +\infty[$ on remarque que

$$x \geq 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{(\ln(x) + t - i\pi)^k} \right| \leq \frac{1}{(\ln^2(x) + \pi^2)^{\frac{k}{2}}}.$$

Or les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln^2(x) + \pi^2)^a} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + \pi^2)^a}$ sont

convergentes dès que $a > \frac{1}{2}$.

On peut donc écrire

pour $k > 1$: $H^{(k-1)}(0) =$

$$\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(\ln(x) - i\pi)^k} - \frac{1}{(\ln(x) + i\pi)^k} \right] \frac{dx}{1+x}.$$

Soit en changeant de variable: $H^{(k-1)}(0) =$

$$\text{Im} \left((-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} \frac{dx}{(x-i\pi)^k} \right).$$

Ceci nous donne pour le nombre de Bernoulli d'ordre $k > 1$ l'expression

intégrale :

$$\beta_k = \frac{(-1)^k k!}{\pi} \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} \frac{dx}{(x - i\pi)^k} \right)$$

4. Application au calcul des sommes des séries de Riemann d'ordre pair

Rappelons la définition de la fonction Zéta de Riemann : $z \mapsto \zeta(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^z}$.

On considère ici la fonction analytique $z \mapsto f(z) = \frac{e^z}{1 + e^z} \times \frac{1}{(z - i\pi)^k}$, n_0 un entier non nul fixé et le chemin fermé C formé par le segment réel parcouru de $-2 \left(n_0 - \frac{1}{2} \right) \pi$ à $2 \left(n_0 - \frac{1}{2} \right) \pi$, suivi du demi-cercle de centre O et de rayon $2 \left(n_0 - \frac{1}{2} \right) \pi$ parcouru dans le sens direct.

Les résidus de f à l'intérieur de ce contour sont :

⊃ Au pôle $z_n = i\pi + 2ni\pi$ avec $0 < n \leq n_0 - 1$:

$$\operatorname{Res}(f, z_n) = \frac{e^{z_n}}{e^{z_n}(z_n - i\pi)^k} = \frac{1}{(2ni\pi)^k}.$$

⊃ Au pôle $i\pi$: $\operatorname{Res}(f, i\pi) = \frac{\beta_k}{k!}$.

En effet, au voisinage de $x = 0$: $f(i\pi + x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \times \frac{1}{x^k} = \frac{1}{x^k} + \frac{1}{e^x - 1} \times \frac{1}{x^k}$

Pour $k > 1$ le coefficient du terme en $\frac{1}{x}$ est donc bien $\frac{\beta_k}{k!}$.

Toujours pour $k > 1$, on vérifie facilement que l'intégrale le long du demi-cercle tend vers 0 lorsque le rayon, c'est-à-dire n_0 tend vers $+\infty$. (Lemme de Jordan)

L'application à f sur le chemin C du théorème des résidus nous donne alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} \frac{dx}{(x-i\pi)^k} = 2i\pi \left[\frac{\beta_k}{k!} + \frac{1}{(2i\pi)^k} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^k} \right].$$

Vu l'écriture intégrale des nombres de Bernoulli, on obtient l'égalité :

$$\beta_k = (-1)^k k! \operatorname{Im} \left(2i \left[\frac{\beta_k}{k!} + \frac{1}{(2i\pi)^k} \zeta(k) \right] \right).$$

Ainsi pour $k = 2q$ nombre pair on retrouve la formule classique :

$$\beta_{2q} = \frac{(-1)^{q+1} 2(2q)! \zeta(2q)}{(2\pi)^{2q}}.$$

5. Quelques expressions de la constante d'Euler

On rappelle la définition première :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n - \ln(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Cette constante remarquable a de nombreuses représentations sous forme intégrale ou de somme de série.

Par exemple une écriture classique est : $\gamma = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)} \right) dt$.

Les formules données ci dessous, en conséquence de la formule clef ne sont pas dans le répertoire classique, bien qu'elles soient comme on va le voir étroitement reliées à d'autres expressions bien connues.

↪ En utilisant notre formule fondamentale :

$$\frac{1}{\ln(p)} = \frac{1}{p-1} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+p)[\ln^2(x) + \pi^2]}$$

On en déduit par Fubini :

$$\gamma = \int_0^1 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+t)[\ln^2(x) + \pi^2]} dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{dt}{x+t} \right) \frac{dx}{\ln^2(x) + \pi^2}$$

D'où la première expression :
$$\gamma = \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx}{\ln^2(x) + \pi^2}$$

↪ Décomposons ensuite

$$\gamma = \int_0^1 \frac{\ln(1+x) dx}{\ln^2(x) + \pi^2} - \int_0^1 \frac{\ln(x) dx}{\ln^2(x) + \pi^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx}{\ln^2(x) + \pi^2}$$

En posant $x = e^{-t}$ dans les deux premières intégrales et $x = e^t$ dans la dernière on obtient :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \frac{(e^t + e^{-t}) \ln(1 + e^{-t})}{t^2 + \pi^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t} dt}{t^2 + \pi^2}.$$

On utilise alors le développement usuel : $\ln(1 + e^{-t}) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-nt}}{n}$.

Celui ci donne par produit

$$(e^t + e^{-t}) \ln(1 + e^{-t}) = 1 - \frac{e^{-t}}{2} + \sum_{n=2}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{2n}{n^2 - 1} e^{-nt}.$$

Ainsi grâce au théorème de Beppo-Levi on peut décomposer la première intégrale en :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} dt}{t^2 + \pi^2} + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2n}{n^2 - 1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} dt}{t^2 + \pi^2}.$$

(On a en effet une série alternée de module décroissant avec l'intégrale du terme général tendant vers 0 à l'infini). On écrit alors par transformations classiques :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} dt}{t^2 + \pi^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t) dt}{t + n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(n\pi x)}{x + 1} dx;$$

$$\text{Puis : } \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2n}{n^2 - 1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} dt}{t^2 + \pi^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2n \sin(n\pi x)}{n^2 - 1} dx.$$

On reconnaît sous l'intégrale une décomposition usuelle en série de Fourier.

En effet pour $x \in]-\pi, \pi[$: $x \cos(x) + \frac{\sin(x)}{2} = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2n \sin(nx)}{n^2 - 1}$.

On aura donc sur $] -1, 1[$: $x \cos(\pi x) + \frac{\sin(\pi x)}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2n \sin(n\pi x)}{n^2 - 1}$.

Notons alors $x \mapsto \overleftrightarrow{x \cos(\pi x)}$, la fonction de période 2 coïncidant avec $x \mapsto \cos(\pi x)$ sur l'intervalle $[-1, 1[$. La synthèse des calculs précédents donne :

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{t^2 + \pi^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\overleftrightarrow{x \cos(\pi x)} dx}{x + 1} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x) dx}{2(x + 1)} + \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t} dt}{t^2 + \pi^2}.$$

Or on sait que $\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x) dx}{x + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{t^2 + \pi^2}$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t} dt}{t^2 + \pi^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\pi x) dx}{x + 1}.$$

Il nous reste donc : $\gamma = \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{\overleftrightarrow{x \cos(\pi x)} dx}{x + 1} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\pi x) dx}{x + 1}$.

En utilisant la convention d'écriture ci dessus pour représenter une fonction de

période 2, on aura donc la formule synthétique :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{\overleftarrow{(x+1) \cos(\pi x)} dx}{x+1}$$

↪ **Retour aux nombres de Bernoulli.** Nous allons maintenant expliciter cette intégrale en utilisant la fonction partie entière. Cela va nous permettre par découpage classique déjà utilisé et à l'aide d'intégrations par parties élémentaires, d'obtenir d'autres écritures de la constante d'Euler avec apparition naturelle des nombres de Bernoulli.

On notera ici $E(x)$ la partie entière d'un réel x quelconque, c'est à dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

Notons par f la fonction de période 2 définie plus haut par $x \mapsto f(x) = \overleftarrow{(x+1) \cos(\pi x)}$.

Pour tout entier k et tout réel x , $f(x) = f(x - 2k)$. Si on veut choisir k tel que $x - 2k$ appartienne à l'intervalle de base $[-1, 1[$ on est conduit à :

$$k \leq \frac{x+1}{2} < k+1.$$

Ainsi $k = E\left(\frac{x+1}{2}\right)$ et par suite

$$f(x) = f(x - 2k) = \left(x + 1 - 2E\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \cos(\pi x).$$

Le changement de variable $t = \frac{x+1}{2}$ dans la dernière expression intégrale de γ obtenue nous conduit alors à :

$$\gamma = \frac{1}{2} + 2 \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \left(\frac{E(t) - t}{t} \right) \cos(2\pi t) dt = \frac{1}{2} + 2 \int_1^{+\infty} \frac{E(t) - t}{t} \cos(2\pi t) dt.$$

Pour tout entier k , on a naturellement :

$$I_k = \int_k^{k+1} \left(\frac{E(t) - t}{t} \right) \cos(2\pi t) dt = k \int_k^{k+1} \frac{\cos(2\pi t)}{t} dt - \int_k^{k+1} \cos(2\pi t) dt = k \int_k^{k+1} \frac{\cos(2\pi t)}{t} dt.$$

En intégrant par parties :

$$I_k = \frac{k}{2\pi} \int_k^{k+1} \frac{\sin(2\pi t)}{t^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_k^{k+1} \frac{E(t) \sin(2\pi t)}{t^2} dt.$$

Ainsi, par découpage on obtient une nouvelle écriture :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{E(t) \sin(2\pi t)}{t^2} dt.$$

Reprenons le procédé ci dessus : découpage et intégrations par parties. Les termes intégrés en cosinus ne s'annulent plus toujours aux bornes entières et on obtient cette fois :

$$\int_k^{k+1} \frac{E(t)}{t^2} \sin(2\pi t) dt = \frac{k}{2\pi} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) - \frac{k}{\pi} \int_k^{k+1} \frac{\cos(2\pi t) dt}{t^3}.$$

$$\text{Or } k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}.$$

On en déduit d'après le procédé de simplification diagonale et d'après une étude précédente sur les séries de Riemann que :

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

On obtient par conséquent, en recollant les segments :

$$\gamma = \frac{7}{12} - \frac{1}{\pi^2} \int_1^{+\infty} \frac{E(t) \cos(2\pi t)}{t^3} dt.$$

Ce procédé se généralise en fait facilement, et ceci encore grâce à la formule établie plus haut reliant les sommes des séries de Riemann $\zeta(2n)$ aux nombres de Bernoulli β_{2n} .

Nous allons établir par récurrence la validité pour tout entier n de la formule (F_n) suivante :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\beta_{2k}}{2k} - \frac{\beta_{2n}}{\zeta(2n)} \int_1^{+\infty} \frac{E(t) \cos(2\pi t) dt}{t^{2n+1}}.$$

- Les calculs précédents donnent la validité initiale pour $n=1$ car $\beta_2 = \frac{1}{6}$ et

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

- Supposons (F_n) vraie et reprenons la technique de découpage amorcée précédemment.

$$I_k = \int_k^{k+1} \frac{\cos(2\pi t) dt}{t^{2n+1}} = \frac{2n+1}{2\pi} \int_k^{k+1} \frac{\sin(2\pi t) dt}{t^{2n+2}}.$$

$$I_k = \int_k^{k+1} \frac{\cos(2\pi t) dt}{t^{2n+1}} =$$

$$\frac{(2n+1)}{4\pi^2} \left(\frac{1}{k^{2n+2}} - \frac{1}{(k+1)^{2n+2}} \right) - \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2} \int_k^{k+1} \frac{\cos(2\pi t) dt}{t^{2n+3}}.$$

Or comme précédemment :

$$a_k = k \left(\frac{1}{k^{2n+2}} - \frac{1}{(k+1)^{2n+2}} \right) = \frac{1}{k^{2n+1}} - \frac{1}{(k+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(k+1)^{2n+2}}.$$

On en déduit $\sum_{k=1}^{k=\infty} a_k = \zeta(2n+2)$ et par suite, en recollant les segments

d'intégration :

$$\int_1^{+\infty} \frac{E(t) \cos(2\pi t) dt}{t^{2n+1}} =$$

$$\frac{(2n+1)\zeta(2n+2)}{4\pi^2} - \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2} \int_1^{+\infty} \frac{E(t) \cos(2\pi t) dt}{t^{2n+3}}$$

On a donc maintenant vu l'hypothèse de récurrence :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\beta_{2k}}{2k} - \frac{\beta_{2n}(2n+1)\zeta(2n+2)}{\zeta(2n)4\pi^2} + \frac{\beta_{2n}(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2\zeta(2n)} \int_1^{+\infty} \frac{E(t) \cos(2\pi t) dt}{t^{2n+3}}.$$

Utilisons maintenant la formule $\beta_{2q} = \frac{(-1)^{q+1}2(2q)!\zeta(2q)}{(2\pi)^{2q}}$.

On en déduit immédiatement $\frac{\beta_{2(n+1)}}{\beta_{2n}} = \frac{-(2n+2)(2n+1)\zeta(2n+2)}{4\pi^2\zeta(2n)}$.

D'où la formule espérée au rang $n+1$:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{\beta_{2k}}{2k} - \frac{\beta_{2(n+1)}}{\zeta(2(n+1))} \int_1^{+\infty} \frac{E(t) \cos(2\pi t) dt}{t^{2(n+1)+1}}.$$

Ceci est un bon exemple d'approche d'une intégrale par l'intermédiaire d'une série divergente. En effet, bien que la somme $S_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\beta_{2k}}{2k}$ tende vers l'infini avec n , on pourra approcher γ en choisissant un entier n assez grand, ce qui permet d'évaluer l'intégrale restante avec une bonne précision au vu de la puissance intervenant au dénominateur.

▮ **La formule d'Hermite.** Nous sommes partis d'une identité classique et en avons déduit trois expressions originales de la constante d'Euler. Pour terminer

nous allons montrer que l'on peut revenir à une formule bien connue, celle dite d'Hermite s'écrivant : $\gamma = \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{2x dx}{(x^2 + \pi^2)(e^{2x} - 1)}$.

On part de $\gamma = \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{(x+1) \cos(\pi x) dx}{x+1}$.

On sait expliciter facilement la transformée de Laplace $F(p)$ d'une fonction f de période T .

On obtient en effet par utilisation d'un découpage en segments de longueur T et par emploi d'une simple série géométrique, la formule :

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(x) dx.$$

Appliquée au numérateur de notre intégrale, elle donne :

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-2p}} \left(\int_0^1 (x+1) \cos(\pi x) e^{-px} dx + \int_1^2 (x-1) \cos(\pi x) e^{-px} dx \right).$$

En passant aux exponentielles complexes, les intégrales s'écrivent comme parties réelles de :

$$I_1 = \int_0^1 (x+1) e^{(i\pi-p)x} dx \text{ et } I_2 = \int_1^2 (x-1) e^{(i\pi-p)x} dx.$$

En intégrant par parties on obtient alors : $I_1 = \frac{-2e^{-p} - 1}{i\pi - p} + \frac{e^{-p} + 1}{(i\pi - p)^2}$ et

$$I_2 = \frac{e^{-2p}}{i\pi - p} - \frac{e^{-p} + e^{-2p}}{(i\pi - p)^2}.$$

La partie réelle de $I_1 + I_2$ est donc :

$$(1 - e^{-2p}) \frac{(p^2 - \pi^2)}{(p^2 + \pi^2)^2} + \frac{p}{p^2 + \pi^2} (2e^{-p} + 1 - e^{-2p}).$$

On en déduit pour la transformée F :

$$F(p) = \frac{p^2 - \pi^2}{(p^2 + \pi^2)^2} + \frac{p}{p^2 + \pi^2} + \frac{p}{p^2 + \pi^2} \frac{2e^{-p}}{1 - e^{-2p}}.$$

Posons alors pour tout $p \geq 0$: $G(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\overbrace{(x+1) \cos(\pi x)}^{\text{cos}(\pi x)}}{x+1} e^{-p(x+1)} dx$.

G est dérivable sur $]0, +\infty[$ suivant :

$$G'(p) = - \int_0^{+\infty} \overbrace{(x+1) \cos(\pi x)}^{\text{cos}(\pi x)} e^{-p(x+1)} dx = -e^{-p} F(p).$$

Comme G tend vers 0 à l'infini, il vient : $G(p) = \int_p^{+\infty} e^{-x} F(x) dx$, soit d'après

l'étude de F :

$$G(p) = \int_p^{+\infty} \frac{x^2 - \pi^2}{(x^2 + \pi^2)^2} e^{-x} dx + \int_p^{+\infty} \frac{x}{x^2 + \pi^2} e^{-x} dx + \int_p^{+\infty} \frac{2xe^{-2x}}{(x^2 + \pi^2)(1 - e^{-2x})} dx.$$

Lorsque p tend vers 0, on obtient la limite à droite de G en ce point, soit :

$$G(0^+) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - \pi^2}{(x^2 + \pi^2)^2} e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + \pi^2} e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{2xe^{-2x}}{(x^2 + \pi^2)(1 - e^{-2x})} dx.$$

On remarque alors que $\left(\frac{x}{x^2 + \pi^2}\right)' = \frac{\pi^2 - x^2}{(x^2 + \pi^2)^2}$. En intégrant par parties la somme des deux premières intégrales s'annule, et il nous reste :

$$G(0^+) = \int_0^{+\infty} \frac{2xe^{-2x}}{(x^2 + \pi^2)(1 - e^{-2x})} dx.$$

Il nous reste, pour obtenir enfin la formule annoncée :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{2x dx}{(x^2 + \pi^2)(e^{2x} - 1)}, \text{ à justifier la continuité de } G \text{ en } 0. \text{ On peut par exemple procéder comme suit :}$$

Pour $a > 0$ fixé d'abord arbitrairement écrivons :

$$G(0) - G(p) = \int_0^a \overbrace{\frac{(x+1)\cos(\pi x)}{x+1}} (1 - e^{-p(x+1)}) dx + \int_a^{+\infty} \overbrace{\frac{(x+1)\cos(\pi x)}{x+1}} (1 - e^{-p(x+1)}) dx.$$

Pour la première intégrale, la convergence vers 0 pour a fixé lorsque p tend vers 0 en décroissant s'obtient simplement avec le théorème de Dini.

En effet la suite de fonctions continues

$$n \mapsto f_n(x) = \left| \frac{\overbrace{(x+1) \cos(\pi x)}^{\text{oscillating}}}{x+1} \right| \left(1 - e^{-\frac{(x+1)}{n}} \right) \text{ converge simplement vers } 0$$

en décroissant sur le compact $[0, a]$ donc converge uniformément.

La deuxième intégrale se décompose en

$$\int_a^{+\infty} \frac{\overbrace{(x+1) \cos(\pi x)}^{\text{oscillating}}}{x+1} dx - \int_a^{+\infty} \frac{\overbrace{(x+1) \cos(\pi x)}^{\text{oscillating}}}{x+1} e^{-\rho(x+1)} dx.$$

Le premier terme, vu la convergence de l'intégrale sur $[0, +\infty[[$, pourra toujours être rendu aussi petit que l'on veut en valeur absolue à condition de choisir a suffisamment grand.

Pour $\epsilon > 0$ donné il existe M positif tel que

$$b > a > M \Rightarrow \left| \int_a^b \frac{\overbrace{(x+1) \cos(\pi x)}^{\text{oscillating}}}{x+1} dx \right| < \epsilon.$$

Pour le dernier terme, il nous faut un outil un peu plus sophistiqué, la deuxième formule de la moyenne. Rappelons ce résultat : Si f désigne une fonction à valeurs réelles décroissante sur $[a, b]$ et si g est intégrable sur ce même intervalle, il existe alors un réel c de $[a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx + f(b) \int_c^b g(x)dx.$$

Appliqué ici, il donne :

$$J(a,b,p) = \int_a^b \frac{\overleftarrow{(x+1) \cos(\pi x)}}{x+1} e^{-p(x+1)} dx =$$

$$e^{-p(a+1)} \int_a^c \frac{\overleftarrow{(x+1) \cos(\pi x)}}{x+1} dx + e^{-p(b+1)} \int_c^b \frac{\overleftarrow{(x+1) \cos(\pi x)}}{x+1} dx.$$

En valeur absolue on aura donc pour $b > a > M$: $|J(a,b,p)| \leq 2\epsilon$, ce qui nous suffit.